

Theoretische Physik 3

Klassische Elektrodynamik

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Wintersemester 2025/26

Version: 17. November 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation, Einführung in die Feldtheorie	3
1.1	Primitives Beispiel einer Feldtheorie: schwingende Saite	4
1.2	Fortgeschrittene Feldtheorien: z.B. Feldtheorien, die elementare Teilchen beschreiben (ED, ...)	9
1.3	Gliederung der Vorlesung	13
2	Elektrostatik	14
2.1	Coulomb-Gesetz	14
2.2	Elektrisches Feld	15
2.3	δ -Funktion	17
2.4	Elektrisches Feld (Fortsetzung)	18
2.5	Elektrostatisches Potential	19
2.6	Feldgleichungen	20
2.7	Satz von Gauß und Satz von Stokes	20
2.8	Feldgleichungen (Fortsetzung)	25
2.9	Feldlinien, Äquipotentialflächen	26
2.10	Homogen geladene Kugel: Berechnung des E-Feldes	27
2.11	Energie einer Ladungsverteilung	30
2.12	Elektrostatische Randwertprobleme	31
2.13	Kondensator	35
2.14	Laplace-Gleichung in 2 Raumdimensionen: Polarkoordinaten	37
2.14.1	Motivation	37
2.14.2	Polarkoordinaten	38
2.14.3	Separationsansatz	38
2.14.4	Vollständige Orthonormalsysteme	40
2.14.5	Anpassen der allgemeinen Lösung an RBs	41
2.15	Laplace-Gleichung in 3 Raumdimensionen: Kugelkoordinaten	44
2.15.1	Motivation	44
2.15.2	Kugelkoordinaten	44
2.15.3	Separationsansatz	45
2.15.4	Anpassen der allgemeinen Lösung an RBs	46
2.16	Multipolentwicklung	47

1 Motivation, Einführung in die Feldtheorie

- Inhalt der Vorlesung: Grundlagen der (klassischen = nicht-quantisierten) Feldtheorie am Beispiel der Elektrodynamik (ED).
 - Grundlagen der Feldtheorie: sehr wichtig.
 - Beispiel der ED: nicht unwichtig, aber weniger wichtig, als Grundlagen der Feldtheorie.
- Warum ist Feldtheorie von zentraler Bedeutung für die Physik?
 - Feldtheorien beschreiben sämtliche elementaren Teilchen (z.B. Elektronen, Quarks, Photonen, Gluonen, ...) und die zwischen ihnen wirkenden fundamentalen Kräfte (elektromagnetische [em] Kraft, starke Wechselwirkung [WW], schwache WW, Gravitation).
 - Daraus ergeben sich alle weiteren in der Physik beobachteten Phänomene (z.B. Bildung und Eigenschaften von Atomkernen, Atomen, Molekülen, Festkörpern, Planeten, Sonnensystemen, Galaxien, ...), häufig beschrieben durch effektive Theorien.
 - Z.B. ist die in letzten beiden Semestern diskutierte Mechanik nur eine effektive Theorie¹, die Berechnung der Trajektorien von makroskopischen Objekten (z.B. Steine, Tennisbälle, ...) in guter Näherung erlaubt.
 - **Feldtheorien bilden somit die Grundlage der Physik.**
 - Feldtheorien finden außerdem in zahlreichen effektiven Theorien Anwendung.
- Was ist ein Feld, wie wird es mathematisch beschrieben?
 - Ein Feld ist eine Funktion der Zeit t und einer oder mehrerer räumlicher Koordinaten, z.B. (x, y, z) oder (r, ϑ, φ) .
 - Beispiele:
 - * $z(x, t)$: eine in x -Richtung gespannte Saite (Gummiband), die in z -Richtung transversal schwingt.
 - * $z(x, y, t)$: eine in der x - y -Ebene gespannte Membran (Trommel), die in z -Richtung transversal schwingt.
 - * $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$: elektrisches und magnetisches Feld bzw. in Kombination das em Feld.
 - * $A^\mu(\mathbf{r}, t) \equiv A^\mu(x^\nu)$ (wobei $x^\nu = (ct, x, y, z)$): relativistische Schreibweise des em Feldes (äquivalent zu $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$).
 - * $\psi_A(\mathbf{r}, t)$: Feld, das Elektronen beschreibt (A : Spinindex; nicht in dieser Vorlesung, erst in der Vorlesung “Einführung in die Quantenfeldtheorie”).

¹Wiki: Als Effektive Theorie wird in der Wissenschaft, gewöhnlich in der Physik, eine Theorie bezeichnet, die eine tiefere, zugrundeliegende Theorie vereinfachend oder zusammenfassend darstellt. Eine effektive Theorie erlaubt für den Anwendungsbereich, für den sie entwickelt wurde, einfachere Berechnungen, die eine gute Näherung an die beobachteten Phänomene darstellen.

- * $u_A^a(\mathbf{r}, t)$, $d_A^a(\mathbf{r}, t)$, ...: Felder, die up-Quarks, down-Quarks, ... beschreiben (A : Spinindex; a : Farbindex; nicht in dieser Vorlesung, erst in der Vorlesung “Einführung in die Quantenfeldtheorie”).

* ...

In dieser Vorlesung behandelte Grundlagen der Feldtheorie betreffen nicht nur das em Feld, sondern zu großen Teilen alle genannten Felder und viele weitere.

Statt

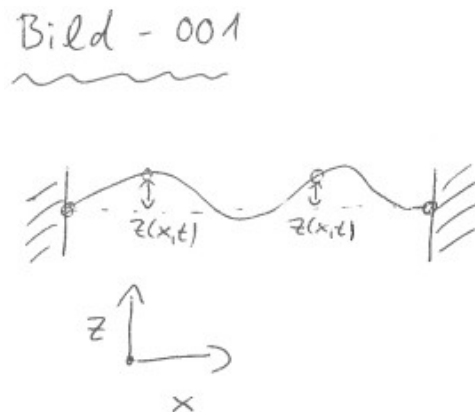
“Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik”

wäre ein besser geeigneter Name für diese Vorlesung

“Theoretische Physik 3 – Einführung in die Feldtheorie”.

1.1 Primitives Beispiel einer Feldtheorie: schwingende Saite

- Beschreibung einer schwingenden Saite ist Teil der **Kontinuumsmechanik**:
 - Dynamik von deformierbaren Objekten, Flüssigkeiten und Gasen.
 - Betrachte kontinuierliche Massenverteilungen statt Bahnen einzelner Massenpunkte (z.B. $\mathbf{r}_j(t)$).
 - Mathematisch beschrieben durch Felder, z.B. $z(x, t)$ bzw. $z(x, y, t)$ (Saite bzw. Membran) oder $\rho(\mathbf{r}, t)$ (Massendichte einer Flüssigkeit oder eines Gases), d.h. durch Funktionen die von Ort und Zeit, also von 2 oder mehr Variablen abhängen.
- Betrachte in 2 Raumdimensionen eine in x -Richtung gespannte Saite, beschrieben durch $z(x, t)$ (z : transversale Auslenkung bei x zum Zeitpunkt t ; longitudinale Auslenkungen werden nicht zugelassen).



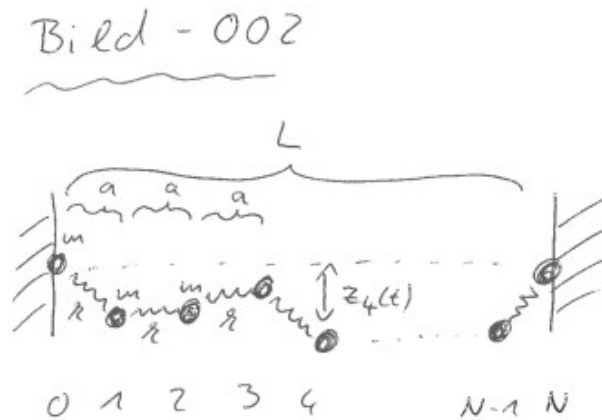
- Einfaches Beispiel einer Feldtheorie:
 - z hängt nur von 2 Variablen x und t ab.
 - Bedeutung von z offensichtlich.
 - Deutlich komplizierteres Beispiel bildet die ED: Elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und magnetisches Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ sind Vektoren, hängen von 4 Variablen $\mathbf{r}$ und t ab, Bedeutung von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ eher abstrakt.

- Modelliere Saite durch $N+1$ identische Massenpunkte (Massen m , Positionen $\mathbf{r}_j = (x_j, z_j)$) verbunden mit N identischen Federn (Ruhelängen 0, Federkonstanten k):

- Saite an beiden Enden im Abstand L in x -Richtung eingespannt, keine longitudinalen Auslenkungen (d.h. Auslenkungen in x -Richtung): $x_j = aj$ mit Abstand $a = L/N$ zwischen benachbarten Massenpunkten.
- Dynamische Freiheitsgrade sind transversale Auslenkungen $z_j(t)$.
- Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \sum_{j=0}^N \frac{m}{2} \dot{z}_j^2(t) - \sum_{j=1}^N \frac{k}{2} (a^2 + (z_j(t) - z_{j-1}(t))^2). \quad (1)$$

(nahezu identisch zur Lagrange-Funktion des 1-dimensionalen Kristalls aus “Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik [SoSe 2020]”, Abschnitt 4.4).



- Übergang ins Kontinuum (**Kontinuumslimes**):

- $N \rightarrow \infty$, wobei $L = Na = \text{const}$ (Positionen der Endpunkte verändern sich nicht), d.h. $a = L/N \rightarrow 0$.
- Massendichte (bzw. Gesamtmasse) der Saite bleibt konstant, $\rho = m/a = \text{const}$, d.h. $m = \rho a \rightarrow 0$,
- $\kappa = ka = \text{const}$, d.h. $k = \kappa/a \rightarrow \infty$ (eine Feder [Federkonstante k] in 2 “halbe Federn” zu zerschneiden liefert 2 Federn jeweils mit Federkonstante $2k$:
 $V = kx^2/2 = (2k)(x/2)^2/2 + (2k)(x/2)^2/2 = \text{const}$).
- Endliche m und k sind im Kontinuumslimes nicht sinnvoll, müssen durch endliche ρ und κ ersetzt werden.
- Außerdem

$$z_j(t) \rightarrow z(x, t) \quad (x = aj) \quad (2)$$

$$\sum_j a \rightarrow \int_0^L dx \quad (3)$$

$$\frac{z_j(t) - z_{j-1}(t)}{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} z(x, t) = z'(x, t), \quad (4)$$

d.h. diskreter Index j wird durch kontinuierliche Variable x ersetzt, Summen durch Integrale, finite Differenzen durch Ableitungen.

– Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{j=0}^N a \frac{m}{2a} \dot{z}_j^2(t) - \sum_{j=1}^N a \frac{ka}{2} \left(\frac{z_j(t) - z_{j-1}(t)}{a} \right)^2 \rightarrow \\
 &\rightarrow \int_0^L dx \underbrace{\left(\frac{\rho}{2} \dot{z}^2(x, t) - \frac{\kappa}{2} z'^2(x, t) \right)}_{=\mathcal{L}(\dot{z}, z', z)} \quad (5)
 \end{aligned}$$

(unterscheidet sich um irrelevante Konstante von (1)).

* $\mathcal{L}(\dot{z}, z', z)$ wird als **Lagrange-Dichte** bezeichnet (Integral über x liefert Lagrange-Funktion).

* Wirkung der Saite:

$$S[z] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \mathcal{L}(\dot{z}, z', z). \quad (6)$$

***** 17. Oktober 2025 (2. Vorlesung) *****

- Prinzip der kleinsten Wirkung (auch als Hamiltonsches Prinzip bezeichnet): Physikalische Zeitentwicklung von $z(x, t)$ entspricht Extremum der Wirkung, d.h. beliebige $\delta z(x, t)$ liefern $\delta S = 0$.
- Bewegungsgleichungen bzw. Feldgleichungen mit Hilfe von Variationsrechnung,

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta z \right) = \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \delta z \right) + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z \right) \\
 &\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left(- \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right) \delta z = \\
 &= \underbrace{\int_0^L dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \delta z \Big|_{t=t_i}^{t=t_f}}_{=0} + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z \Big|_{x=0}^{x=L} \\
 &\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left(- \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right) \delta z. \quad (7)
 \end{aligned}$$

– Erster Term nach letztem Gleichheitszeichen verschwindet aufgrund des Prinzips der kleinsten Wirkung, bei dem $z(x, t)$ bei $t = t_i$ und bei $t = t_f$ vorgegeben ist, d.h. $\delta z(x, t_i) = \delta z(x, t_f) = 0$.

– Damit $\delta S = 0$, wenn

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

(eine Variante der Euler-Lagrange-Gleichungen, die zum hier diskutierten Beispiel gehörige **Feldgleichung**) und

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z \right|_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (9)$$

(eine Gleichung am Rand des Felds, also an den Endpunkten der Saite, d.h. bei $x = 0$ und $x = L$) erfüllt sind.

- Feldgleichungen, wie z.B. (8), sind **partielle DGLs**, d.h. DGLs in mehreren Variablen, und daher i.A. viel schwieriger zu lösen, als gewöhnliche DGLs der Mechanik (umfassendere Behandlung von partiellen DGLs in “Theoretische Physik 3, Mathematische Ergänzungen zur Vorlesung”).
- Zusätzliche Gleichungen am Rand, wie z.B. (9), sind in der Feldtheorie ebenso wichtig, wie Feldgleichungen (8), dürfen nicht ignoriert oder vergessen werden.
- Einsetzen der Lagrange-Dichte der Saite (5) liefert Feldgleichung

$$\rho \ddot{z}(x, t) - \kappa z''(x, t) = 0 \quad (10)$$

sowie

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \left(z'(L, t) \delta z(L, t) - z'(0, t) \delta z(0, t) \right) = 0. \quad (11)$$

***** 21. Oktober 2025 (3. Vorlesung) *****

- Allgemeine Lösung der Feldgleichung (10) einfach (durch “scharfes Hinschauen”),

$$z(x, t) = z_+(x + vt) + z_-(x - vt) \quad , \quad v = \sqrt{\kappa/\rho}. \quad (12)$$

- z_+ und z_- sind beliebige unabhängige Funktionen in jeweils einer Variable.
- $z_+(x + vt)$ entspricht einer in negativer x -Richtung mit Geschwindigkeit v laufenden Welle.
- $z_-(x - vt)$ entspricht einer in positiver x -Richtung mit Geschwindigkeit v laufenden Welle.
- $\rightarrow$ (10) wird auch als **Wellengleichung** bezeichnet.
- Wellengleichungen analog zu (10) existieren auch in 3 oder mehr Variablen (z.B. Feldgleichung einer schwingenden Membran, Feldgleichungen des em Feldes), dann einfache Lösung wie in (12) nicht mehr möglich.
- Für weitere Einschränkung der Lösung ist physikalische Vorgabe für Endpunkte der Saite erforderlich (z.B. eingespannt, frei beweglich, periodisch).
- Typische Vorgabe ist beidseitig eingespannte Saite (sogenannte **Dirichlet-Randbedingungen**): $z(0, t) = z(L, t) = 0$.
 - Es folgt $\delta z(0, t) = \delta z(L, t) = 0$, damit (11) automatisch erfüllt.

- Einsetzen von (12) liefert Bedingungen an z_+ und z_- :

$$z(0, t) = z_+(vt) + z_-(-vt) = 0 \quad (13)$$

$$z(L, t) = z_+(L + vt) + z_-(L - vt) = 0, \quad (14)$$

woraus

$$z_+(u) + z_-(-u) = 0 \quad (15)$$

$$z_+(u + 2L) + z_-(-u) = 0 \quad (16)$$

bzw.

$$z_+(u + 2L) - z_+(u) = 0, \quad z_-(-u) = -z_+(-u) \quad (17)$$

folgt.

→ z_+ ist damit beliebige $2L$ -periodische Funktion.

→ z_- ist durch z_+ vollständig festgelegt.

- Spezielle Lösung erfordert Vorgabe von ABs, z.B. $z(x, 0) = f(x)$ (Auslenkung der Saite bei $t = 0$) und $\dot{z}(x, 0) = g(x)$ (Geschwindigkeit der Saite bei $t = 0$), legen z_+ und damit $z(x, t)$ eindeutig fest:

- Einsetzen von (17) [rechte Gleichung] in (12) liefert z und $\dot{z}$ ausgedrückt durch z_+ :

$$z(x, t) = z_+(x + vt) - z_+(-x + vt) \quad (18)$$

$$\dot{z}(x, t) = v(z'_+(x + vt) - z'_+(-x + vt)) \quad (19)$$

(z'_+ bzw. z'_- bezeichnet Ableitung nach Argument von z_+ bzw. z_- , nicht Ableitung nach x).

- ABs liefern Gleichungssystem zur Bestimmung von z_+ :

$$z(x, 0) = z_+(x) - z_+(-x) = f(x)$$

$$\dot{z}(x, 0) = v(z'_+(x) - z'_+(-x)) = g(x)$$

$$\rightarrow v(z_+(x) + z_+(-x)) = \int dx g(x) = G(x)$$

$$\rightarrow z_+(x) + z_+(-x) = \frac{G(x)}{v}$$

$$\rightarrow z_+(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{G(x)}{v} \right)$$

$$\rightarrow z_+(-x) = \frac{1}{2} \left(-f(x) + \frac{G(x)}{v} \right) \quad (20)$$

(G ist Stammfunktion von g ; Gleichungen gelten für $0 \leq x \leq L$, legen damit $z_+(u)$ für $-L \leq u \leq +L$ fest, Periodizität (17) [linke Gleichung] legt dann $z_+(u)$ für $u \in \mathbb{R}$ fest und damit $z(x, t)$ gemäß (18); unbestimmte Konstante in G aufgrund der Integration fällt in (18) wegen Differenz weg).

- Konkretes Beispiel:

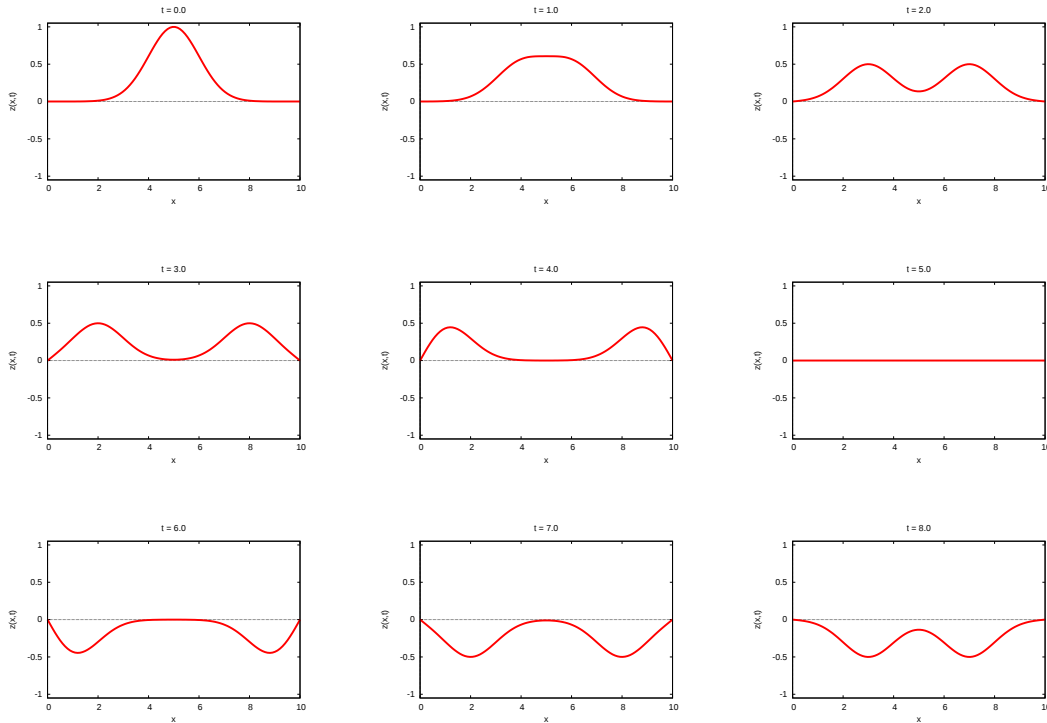
* ABs

$$z(x, 0) = f(x) = \Delta \left(\exp \left(-\frac{(x - L/2)^2}{2\sigma^2} \right) - \exp \left(-\frac{(L/2)^2}{2\sigma^2} \right) \right) \quad (21)$$

$$\dot{z}(x, 0) = g(x) = 0 \rightarrow G(x) = 0, \quad (22)$$

d.h. bei $t = 0$ mittige nahezu Gauß-förmige Auslenkung um Δ mit Breite σ , Saite dabei in Ruhe.

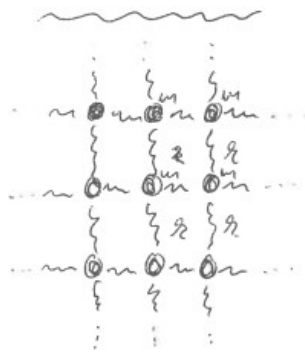
- * Abbildungen für $L = 10.0$, $\Delta = 1.0$, $\sigma = 1.0$, $v = 1.0$: Gauß-förmige Auslenkung teilt sich in links- und rechtslaufende Welle, wird an eingespannten Enden reflektiert, läuft mit umgekehrtem Vorzeichen wieder zurück.



1.2 Fortgeschrittene Feldtheorien: z.B. Feldtheorien, die elementare Teilchen beschreiben (ED, ...)

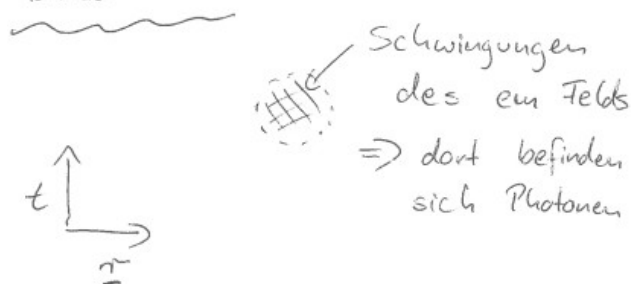
- Im Folgenden eine rein qualitative, oberflächliche, anschauliche Diskussion von Feldtheorien und typischen von ihnen beschriebenen Phänomenen.
 - Soll Bedeutung und Potential von Feldtheorien motivieren.
 - Nur Teile davon in dieser Vorlesung (Fortsetzung ist “Quantenfeldtheorie”).
- Konstruktion der schwingenden Saite mit Massenpunkten und Federn geradlinig auf 2 oder 3 Raumdimensionen übertragbar.

Bild - 003



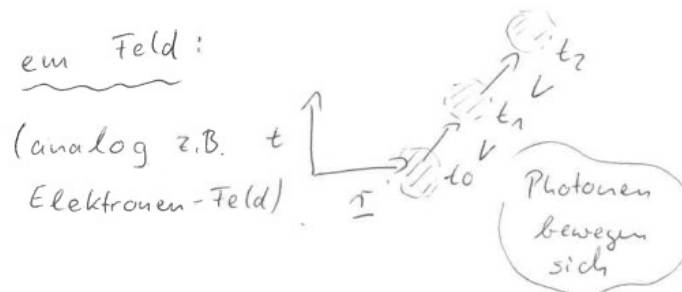
- Das em Feld und andere Felder sind mathematisch sehr ähnlich zu einem feinen, den Raum ausfüllenden, 3-dimensionalen Netzwerk von Massenpunkten und Federn.
 - *“Anschaulich kann man sich Felder als solche Netzwerke vorstellen.”*
- Wie kann eine Feldtheorie Teilchen beschreiben?
 - Jeder Teilchensorte (z.B. Elektronen, Photonen, ...) ist ein entsprechendes Feld zugeordnet (siehe Beispiele oben).
 - Wenn ein Feld in der Nähe des Raumzeitpunkts $(\mathbf{r}, t)$ seinen Wert (z.B. $\mathbf{E}$) zeitlich oder räumlich verändert oder der Wert $\neq 0$ ist, steckt in diesem Bereich und zu dieser Zeit Energie im Feld. Ein Experimentator beobachtet bzw. interpretiert das als ein oder mehrere Teilchen bei $(\mathbf{r}, t)$ (z.B. im Fall von $\mathbf{E}$ Photonen).
 - * *“In der Nähe des Raumzeitpunkts $(\mathbf{r}, t)$ schwingt das Netzwerk von Massenpunkten und Federn und/oder ist deformiert, was einem oder mehreren Teilchen entspricht.”*

Bild - 004



- Teilchenbewegungen werden durch Wellen beschrieben:
 - * Wiki: *“Eine Welle ist eine sich räumlich ausbreitende Veränderung (Störung) oder Schwingung einer orts- und zeitabhängigen physikalischen Größe.”*
 - * Bewegt sich der Bereich, in dem Energie im Feld enthalten ist, entspricht dies einer Teilchenbewegung. Im Rahmen der Feldtheorie spricht man von einer Welle.

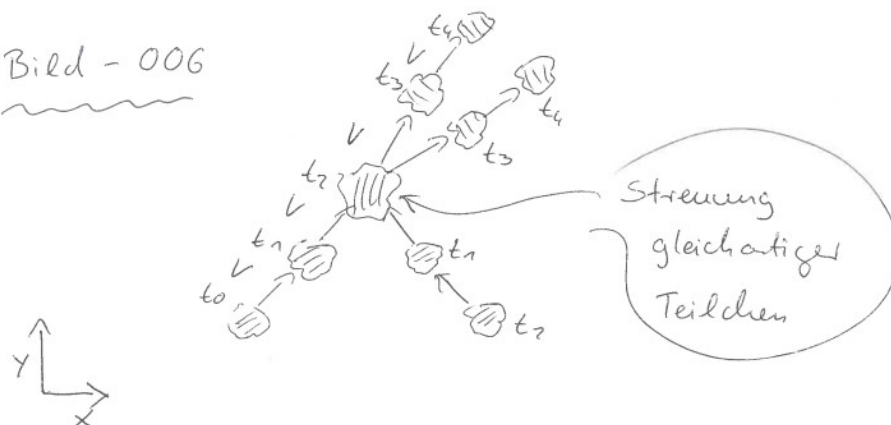
Bild - 005



– Streuung gleichartiger Teilchen:

- * Beeinflussen sich kollidierende Wellen gegenseitig, entspricht dies der Streuung gleichartiger Teilchen.
- * Ob dies der Fall ist, hängt von konkreter Formulierung der Feldtheorie ab, d.h. der Lagrange-Dichte oder den Feldgleichungen.
- * Z.B. keine Photon-Photon-Streuung beim em Feld.

Bild - 006

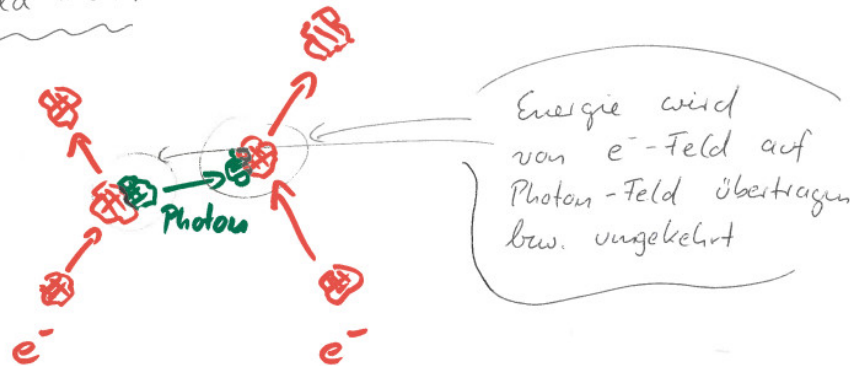


– Teilchenerzeugung und -vernichtung:

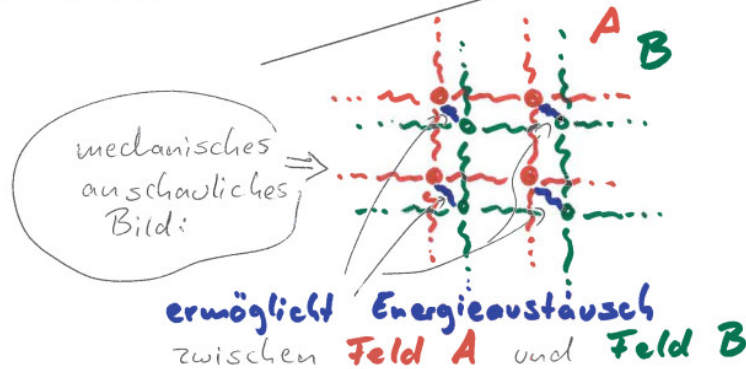
- * Energie kann von einem Feld A auf anderes Feld B übertragen werden
→ Teilchen der Sorte A verschwinden, Teilchen der Sorte B entstehen.
- * "Kann man sich ebenfalls anschaulich durch Netzwerke von Massenpunkten und Federn vorstellen: Netzwerk A und Netzwerk B , zwischen denen zusätzliche Federn gespannt sind, können Energie austauschen."

- * Z.B. kann in der quantisierten ED (Quantenelektrodynamik, QED) ein Elektron ein Photon erzeugen (= aussenden) und ein anderes Elektron dieses Photon vernichten (= absorbieren), was eine abstoßenden Kraft zwischen den Elektronen bewirkt.

Bild - 007



Kraftübertragung zwischen zwei Elektronen via Photonaustausch



- Klassische Feldtheorie (Inhalt dieser Vorlesung) versus Quantenfeldtheorie (Inhalt spezieller fortgeschrittener Vorlesungen):
 - In Quantenfeldtheorie kann Feldenergie nur um von der Theorie vorgegebene Energiemengen (Quanten) erhöht oder erniedrigt werden. Jedes Quant entspricht Erzeugung oder Vernichtung von einem Teilchen. Teilchenanzahl ist also eine nicht-negative ganze Zahl.
 - In klassischer Feldtheorie kann die Feldenergie beliebig erhöht oder erniedrigt werden. Einschränkung auf ganze Teilchenzahlen existiert daher nicht. Eine solche Theorie ist wenig sinnvoll zur Beschreibung von Systemen weniger Teilchen, gut jedoch für Systeme sehr vieler Teilchen.
 - An Phänomenen der ED ist häufig große Anzahl von Photonen beteiligt (z.B. Einschalten einer Lampe, Feld in einem Kondensator, ...). Solche Phänomene lassen sich gut im Rahmen einer klassischen Feldtheorie (klassische ED) beschreiben und verstehen (wesentlicher Inhalt dieser Vorlesung).

1.3 Gliederung der Vorlesung

- Zunächst spezielle einfach beschreibbare Phänomene der ED: Elektrostatik und Magnetostatik (keine zeitabhängigen Phänomene).
- Dann Kombination von Elektrostatik und Magnetostatik und Hinzunahme zeitabhängiger Phänomene
→ ED.
- Relativistische Formulierung der ED (in Form von Lorentz-Vektoren und -Tensoren, nicht mittels $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$).
- Diskussion von Phänomenen der ED.

2 Elektrostatik

- **Elektrostatik:** Ruhende, d.h. zeitunabhängige elektrische Ladungen und Ladungsverteilungen.

2.1 Coulomb-Gesetz

- **Elektrische Ladung** q (im Folgenden meist nur als Ladung bezeichnet): Eigenschaft eines Massenpunkts (man spricht dann auch von **Punktladung**) oder ausgedehnten Objekts, ähnlich zur in der “Mechanik” eingeführten Masse m .

- “ m ist Ladung der Gravitation, q ist Ladung der ED.”
- Während $m \geq 0$, kann q sowohl positiv als auch negativ sein.

- Grundlegende experimentelle Befunde:

- Gleichnamige Ladungen (gleiches Vorzeichen) stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen (entgegengesetztes Vorzeichen) ziehen sich an (ein wesentlicher Unterschied zur Gravitation, bei der sich Massen stets anziehen).
- Kraft zwischen zwei Punktladungen $\propto 1/(\text{Abstand})^2$.
- Kraftgesetz ist das **Coulomb-Gesetz**:

$$\mathbf{F}_{j \rightarrow k} = \alpha \frac{q_j q_k}{r_{jk}^2} \hat{\mathbf{r}}_{j \rightarrow k}. \quad (23)$$

- * $\mathbf{F}_{j \rightarrow k}$: Kraft von Punktladung j auf Punktladung k .
- * q_j : Elektrische Ladung der Punktladung j .
- * $r_{jk} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|$ ($\mathbf{r}_j$: Position der Punktladung j).
- * $\hat{\mathbf{r}}_{j \rightarrow k} = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)/r_{jk}$.
- * $\alpha > 0$: Konstante (abhängig vom Maßsystem, d.h. den gewählten Einheiten; siehe unten).

- Superpositionsprinzip: > 2 Punktladungen, Kraft auf Punktladung k

$$\mathbf{F}_k = \sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{j \rightarrow k} \quad (24)$$

(scheint selbstverständlich, ist aber nicht bei allen Theorien so, z.B. nicht der Fall bei starker WW [WW zwischen Quarks]).

- Ladung von Elementarteilchen quantisiert:

- * Elektron: $q = -e$.
- * Proton: $q = +e$ (kein elementares Teilchen, setzt sich aus 2 u -Quarks und einem d -Quark zusammen).
- * u -Quark: $q = +(2/3)e$.
- * d -Quark: $q = -(1/3)e$.
- * ...
- * e nennt man **Elementarladung**.

- **Ladungserhaltung:** Summe aller Ladungen in abgeschlossenem System erhalten.

- * Positive und negative Ladungen können sich gegenseitig auslöschen bzw. paarweise erzeugt werden.
- * Erzeugung/Vernichtung einer einzelnen positiven oder negativen Ladung nicht möglich.
- * Kann man mit Noether-Theorem zeigen ($\rightarrow$ Vorlesung “Quantenfeldtheorie”).
- Gültigkeitsbereich des Coulomb-Gesetzes: $10^{-14} \text{ m} \lesssim r_{jk} \lesssim 10^8 \text{ m}$.
 - * Kleinere Abstände: Erzeugung/Vernichtung von Teilchen, Quantenfeldtheorie erforderlich.
 - * Größere Abstände: Präzisionsexperimente schwierig.
- Maßsysteme:
 - **Gauß-System:**
 - * “*Wahl des Theoretikers.*” (Wird in dieser Vorlesung überwiegend verwendet.)
 - * $\alpha = 1$ (Definition).
 - * Damit $[q] = \text{g}^{1/2} \text{m}^{3/2}/\text{s}$.
 - * $e \approx 4.80 \times 10^{-10} \text{ esu}$ (**electrostatic unit**); $1 \text{ esu} = \text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2}/\text{s}$.
 - * Elektrische und magnetische Felder haben gleiche Einheit (dazu später mehr).
 - **MKSA-System** (Meter-Kilogramm-Sekunde-Ampere) bzw. **SI-System** (Systeme International d’Unites):
 - * “*Wahl des Experimentalisten.*”
 - * $\alpha = 10^{-7} \text{ N C}^2/\text{A}^2$ (Definition; A: **Ampere**).
 - * Damit $[q] = \text{C}$ (**Coulomb**); $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$.
 - * $e \approx 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.
 - * Häufig $\alpha = 1/4\pi\epsilon_0$ (Definition von ϵ_0 [**Dielektrizitätskonstante des Vakuums**]; $\epsilon_0 \approx 8.84 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$).
 - * Elektrische und magnetische Felder haben unterschiedliche Einheiten.

2.2 Elektrisches Feld

- Definition:

$$\text{elektrisches Feld } \mathbf{E} = \frac{\text{elektrostatische Kraft auf Punktladung } q}{q} \quad (25)$$

($\mathbf{E}$ bezeichnet man auch als **elektrische Feldstärke**, q als **Probeladung**).

- Das von N Punktladungen erzeugte elektrische Feld (E-Feld) lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (26)$$

- E-Feld ist Vektorfeld, d.h. jedem Raumpunkt $\mathbf{r}$ wird ein Vektor $\mathbf{E}$ zugeordnet.

- Kraft auf Probeladung q im E-Feld:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (27)$$

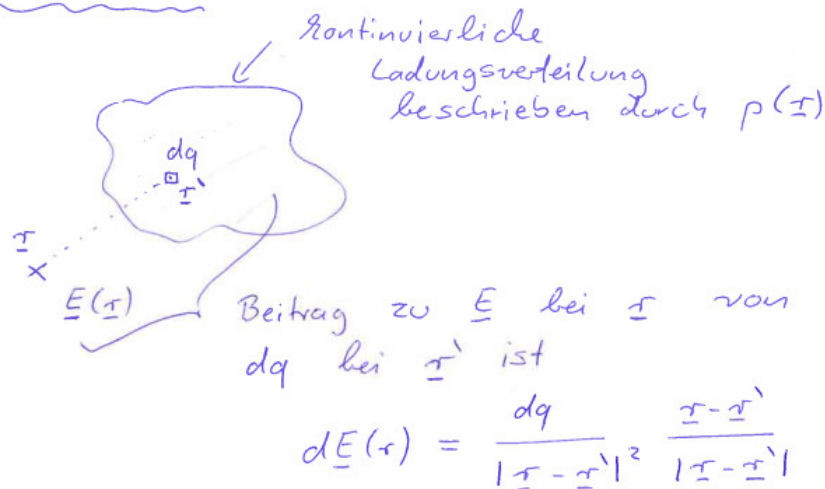
- Verallgemeinerung durch Einführen der (**elektrischen**) **Ladungsdichte**:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (28)$$

Damit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (29)$$

Bild - 008



- Beispiel: E-Feld einer homogen geladenen Kugel im Ursprung (Radius R , Ladung q):

– Ladungsdichte:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 3q/4\pi R^3 & \text{falls } |\mathbf{r}| < R \\ 0 & \text{falls } |\mathbf{r}| \geq R \end{cases}. \quad (30)$$

– E-Feld ergibt sich durch Einsetzen von (30) in (29) und Lösen des Integrals (siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden”, Abschnitt 9.2 bzw. Hausaufgabe).

***** 24. Oktober 2025 (4. Vorlesung) *****

- Mit Hilfe der sogenannten **δ -Funktion** kann auch die Ladungsdichte einer Punktladung q_j bei $\mathbf{r}_j$ angegeben werden:

$$\rho(\mathbf{r}) = q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (31)$$

2.3 δ -Funktion

- Sehr häufig und wichtig in Physik, z.B. in Feldtheorie oder Quantenmechanik.
- δ -Funktion in 1 Dimension:

- Definition von $\delta(x)$: Für jede glatte Funktion $f(x)$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0). \quad (32)$$

- “Anschauliche Definition” von $\delta(x)$:

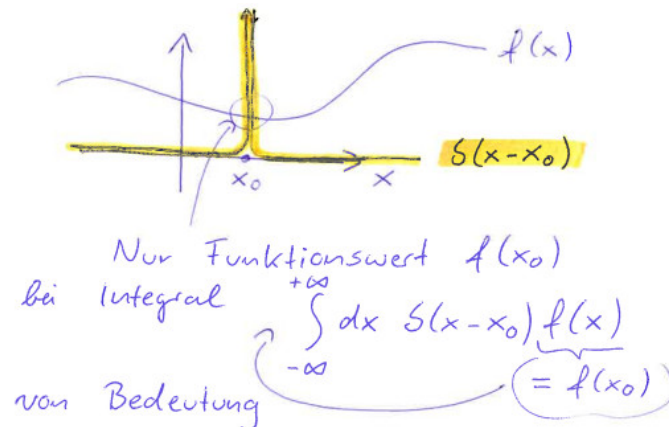
$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{falls } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (33)$$

wobei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) = 1, \quad (34)$$

d.h. unendlich schmaler und hoher Peak bei $x = x_0$ mit Flächeninhalt 1.

Bild - 009



- Rechnen mit δ -Funktionen i.d.R. sehr einfach, lediglich (32) muss verwendet werden: δ -Funktionen und Integrale löschen sich paarweise aus.
- Gelegentlich erfordern Rechnungen mathematische Darstellung der δ -Funktion in Form eines Grenzwertes einer stetig differenzierbaren Funktion; viele Möglichkeiten, z.B.

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-x^2/2\epsilon^2}; \quad (35)$$

Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ darf dabei erst am Ende der Rechnung gebildet werden (die δ -Funktion ist aus mathematischer Sicht keine Funktion, sondern eine **Distribution**).

- δ -Funktion in mehr als 1 Dimension, z.B. in 3 Raumdimensionen:

- Produkt 1-dimensionaler δ -Funktionen,

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (36)$$

- Beispiel: Berechne/überprüfe Ladungsstärke der durch die Ladungsdichte (31) beschriebenen Punktladung:

$$\begin{aligned}
 q &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = q_j \int d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = \\
 &= q_j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_j)}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta(y - y_j)}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dz \delta(z - z_j)}_{=1} = q_j.
 \end{aligned} \tag{37}$$

- Starke Analogie zwischen δ -Funktion (im Kontinuierlichen, d.h. im Kontext von Funktionen $f(x)$) und Kronecker- δ (im Diskreten, d.h. im Kontext von Vektoren f_j), z.B.

$$\sum_j \delta_{jk} = 1 \quad (\text{analog zu (34)}) \tag{38}$$

$$\sum_j \delta_{jk} f_j = f_k \quad (\text{analog zu (32)}). \tag{39}$$

2.4 Elektrisches Feld (Fortsetzung)

- Das von N Punktladungen erzeugte E-Feld (26) kann damit auch gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \left(\underbrace{\sum_{j=1}^N q_j \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j)}_{\text{Ladungsdichte der } N \text{ Punktladungen}} \right) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{40}$$

geschrieben werden.

- Vertauschen von Integral und Summe und Lösen des Integrals führt zurück zu (26):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N q_j \int d^3r' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \tag{41}$$

- Ist “glatte Ladungsdichte” (Ladungsdichte beschrieben durch stückweise stetige Funktion), wie z.B. in (30), realistisch?

- Ladungen in Natur quantisiert und mit elementaren Teilchen, d.h. Massenpunkten assoziiert ...?

- Müssten also nicht stets Ladungsdichten der Form

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \tag{42}$$

verwendet werden ...?

- Im Prinzip ja ...

- ... aber glatte Ladungsdichten, wie z.B. (30), sind häufig gute Näherungen (z.B. im Fall der homogen geladenen Kugel, wenn Probeladungen, E-Feld, etc. nur in Bereichen hinreichend weit von den Punktladungen entfernt betrachtet werden).

- Mit solchen **mittleren Ladungsdichten** (gemittelt über kleine räumliche Bereiche deren Ausdehnung etwa dem Abstand benachbarter Punktladungen entspricht) kann man meist leichter rechnen, als mit **mikroskopischen Ladungsdichten** (42) (detaillierte Diskussion in Abschnitt ??).
- Analogie: Mechanik, starrer Körper, auch da wurden mittlere Massendichten betrachtet, obwohl die Masse in winzigen Bereichen konzentriert ist (“in den Atomkernen”).

2.5 Elektrostatistisches Potential

- In Mechanik wurden konservativen Kräften ($\text{rot } \mathbf{F} = 0$) Potentiale V zugeordnet:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (43)$$

- Coulomb-Kraft ist Zentralkraft und daher konservativ.
- Da E-Feld proportional zur Kraft ($\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, Gleichung (27)), ist es zweckmäßig auch dem E-Feld ein Potential zuzuordnen, das **elektrostatistisches Potential** Φ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}). \quad (44)$$

- Potential, in dem sich eine Probeladung q bewegt, ergibt sich aus elektrostatischem Potential analog zu (27) gemäß

$$V(\mathbf{r}) = q\Phi(\mathbf{r}). \quad (45)$$

- Elektrostatistisches Potential und E-Feld einer Punktladung q_j bei $\mathbf{r}_j$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \quad (46)$$

(mathematische Struktur und Berechnung analog zur in “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden”, Kapitel 5 und 6 betrachteten Gravitationskraft).

- Elektrostatistische Potentiale zu E-Feldern (26) und (29) lauten damit

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \quad (47)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (48)$$

2.6 Feldgleichungen

- Mit (29) lässt sich für gegebene Ladungsdichte E-Feld berechnen.
- Zusätzlich zu diesem Integralausdruck ist äquivalente DGL wünschenswert, die sogenannte **Feldgleichung**.
- Wende dafür ∇ auf (29) an:

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \dots \quad (49)$$

- Nebenrechnung:

$$\partial_j \frac{r_j}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{3}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3r_j}{|\mathbf{r}|^4} \frac{r_j}{|\mathbf{r}|} = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \neq 0 \quad (50)$$

($\partial_j \equiv \partial/\partial r_j$; $\partial_j |\mathbf{r}| = r_j/|\mathbf{r}|$ wurde verwendet); Ergebnis gilt nicht für $\mathbf{r} = 0$, da $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ dort nicht differenzierbar; für Aussage bei $\mathbf{r} = 0$ benötigt man Satz von Gauß.

***** 28. Oktober 2025 (5. Vorlesung) *****

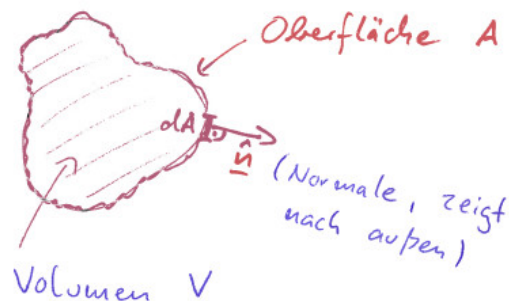
2.7 Satz von Gauß und Satz von Stokes

- Satz von Gauß und Satz von Stokes: Wichtige Integralsätze der Feldtheorie.
- **Satz von Gauß:**

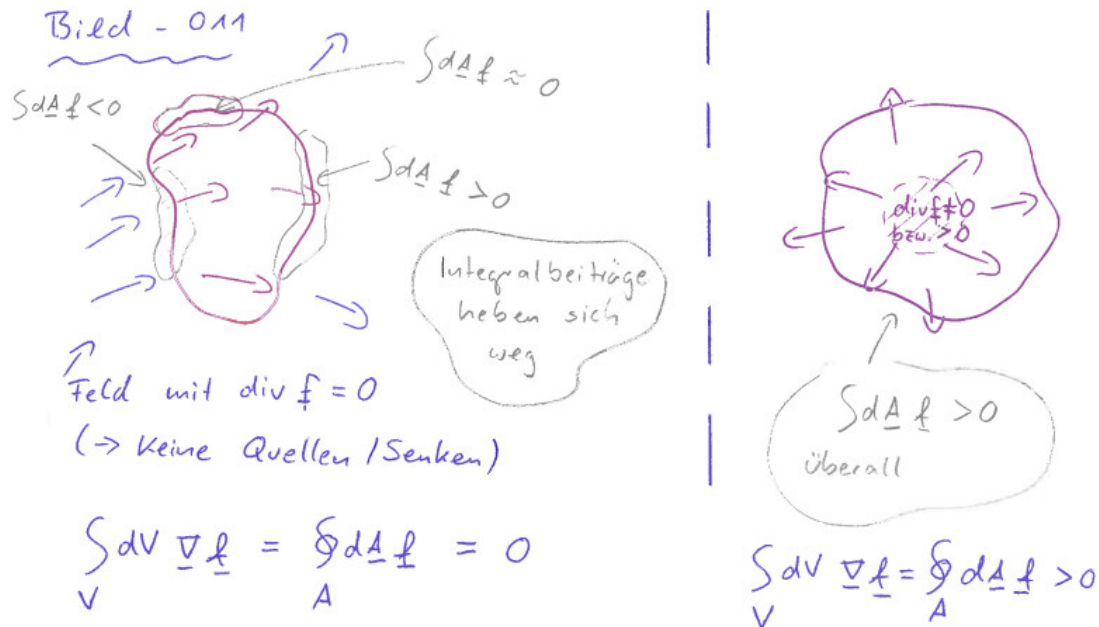
$$\int_V dV \underbrace{\nabla \mathbf{f}(\mathbf{r})}_{=\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{r})} = \oint_A d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (51)$$

- $\int_V dV$: Integration über d -dimensionales Volumen V (häufig in $d = 3$ Raumdimensionen, dann $\int_V dV = \int_V d^3 r$).
- $\oint_A d\mathbf{A} = \oint_A dA \hat{\mathbf{n}}$: Integration über geschlossene das Volumen V begrenzende $d - 1$ -dimensionale (Hyper-)Fläche A (dA : Flächenelement; $\hat{\mathbf{n}}$: Flächennormale).
- $\mathbf{f}$: Beliebige (stetig differenzierbare) vektorielle Funktion (d Komponenten).

Bild-010 (Gauß)



- Erlaubt Umschreiben eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral.
- Anschaulich:
 - $\mathbf{f}$ kann man sich als Flussdichte von z.B. Wasser vorstellen (das Wasser fließt entlang der Vektorpfeile; je länger die Pfeile, desto mehr Wasser pro Zeit).
 - $\text{div } \mathbf{f}$: Wiki, “Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalarfeld, das an jedem Punkt angibt, wie sehr die Vektoren in einer kleinen Umgebung des Punktes auseinanderstreben ... Interpretiert man das Vektorfeld als Strömungsfeld einer Größe, für die die Kontinuitätsgleichung gilt, dann ist die Divergenz die Quelldichte. Senken haben negative Divergenz.”
 - Satz von Gauß in Worten:
 Summe über alle Quellen und Senken innerhalb von V =
 = Flussdichte durch die das Volumen V begrenzende Fläche. (52)

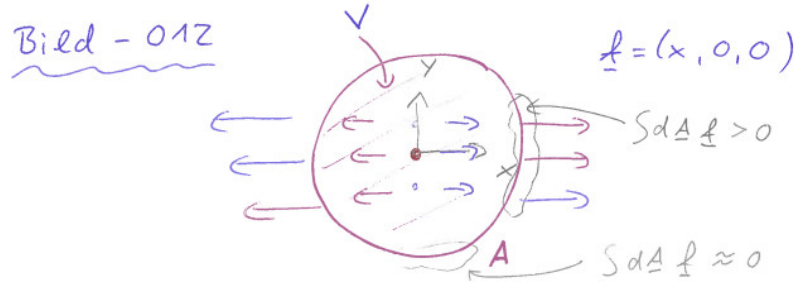


- Beispiel: V ist Kugel mit Zentrum im Ursprung und Radius R , $\mathbf{f} = (x, 0, 0)$,

$$\int_V dV \underbrace{\nabla \mathbf{f}(\mathbf{r})}_{=1} = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \oint_A d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= R^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_r x \mathbf{e}_x = \\ &= R^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= R^3 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin^3(\vartheta)}_{=4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2(\varphi)}_{=\pi} = \frac{4\pi R^3}{3}, \end{aligned} \quad (54)$$

Satz von Gauß scheint also zu stimmen.



• Beweisskizze (für $d = 2$):

- Teile Volumen V in sehr viele kleine (d.h. unendlich viele infinitesimale) Quadrate auf.
- Für jedes infinitesimale Quadrat gilt

$$dV \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) = dx dy \left(\frac{\partial f_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\mathbf{r})}{\partial y} \right) \quad (55)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_x dx/2) + d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{e}_x dx/2) + d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_y dy/2) + d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{e}_y dy/2) &= \\ &= dy \mathbf{e}_x \left(\mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_x dx/2) - \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{e}_x dx/2) \right) \\ &\quad + dx \mathbf{e}_y \left(\mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_y dy/2) - \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{e}_y dy/2) \right) = \\ &= dx dy \underbrace{\frac{f_x(\mathbf{r} + \mathbf{e}_x dx/2) - f_x(\mathbf{r} - \mathbf{e}_x dx/2)}{dx}}_{=\partial f_x / \partial x} \\ &\quad + dx dy \underbrace{\frac{f_y(\mathbf{r} + \mathbf{e}_y dy/2) - f_y(\mathbf{r} - \mathbf{e}_y dy/2)}{dy}}_{=\partial f_y / \partial y} \end{aligned} \quad (56)$$

und damit

$$\begin{aligned} dV \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= \left(d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_x dx/2) + d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{e}_x dx/2) + d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{e}_y dy/2) \right. \\ &\quad \left. + d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r} - \mathbf{e}_y dy/2) \right). \end{aligned} \quad (57)$$

- Summiere über alle infinitesimalen Quadrate, d.h. integriere über Volumen V :

* Linke Seite von (57):

$$\int_V dV \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (58)$$

* Rechte Seite von (57): Infinitesimale Flächenstücke im Inneren von V treten jeweils doppelt mit entgegengesetztem Vorzeichen auf, heben sich also weg,

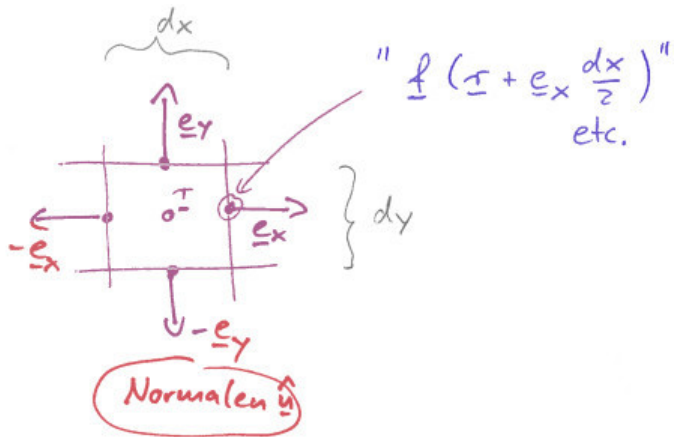
$$\oint_A d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (59)$$

* Satz von Gauß damit bewiesen.

Bild - 013



kleine Quadrate



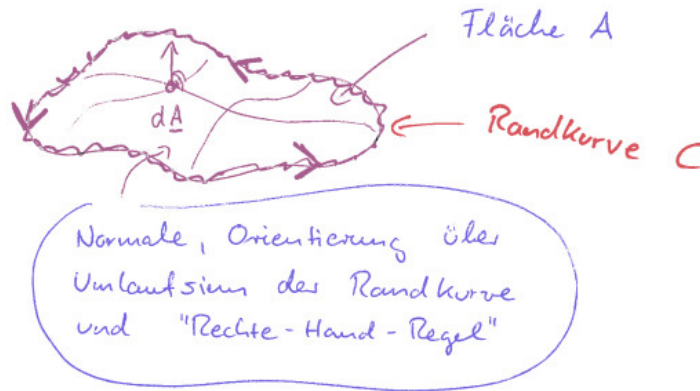
- infinitesimale innere Flächenstücke, treten doppelt mit entgegengesetzten Vorzeichen auf
- infinitesimale äußere Flächenstücke, treten einfach auf

- **Satz von Stokes** (in 3 Dimensionen):

$$\int_A d\mathbf{A} \underbrace{\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r})}_{=\text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{r})} = \oint_C d\mathbf{r} \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (60)$$

- $\int_A d\mathbf{A}$: Integration über 2-dimensionale eventuell gekrümmte Fläche.
- $\oint_C d\mathbf{r}$: Integration über geschlossene die Fläche A begrenzende Kurve C .
- $\mathbf{f}$: Beliebige (stetig differenzierbare) vektorielle Funktion.

Bild - 014 (Stokes)



- Erlaubt Umschreiben eines Flächenintegrals in ein Kurvenintegral.
- Beispiel: A ist Kreis in x - y -Ebene mit Zentrum im Ursprung und Radius R , $\mathbf{f} = (+y, -x, 0)$,

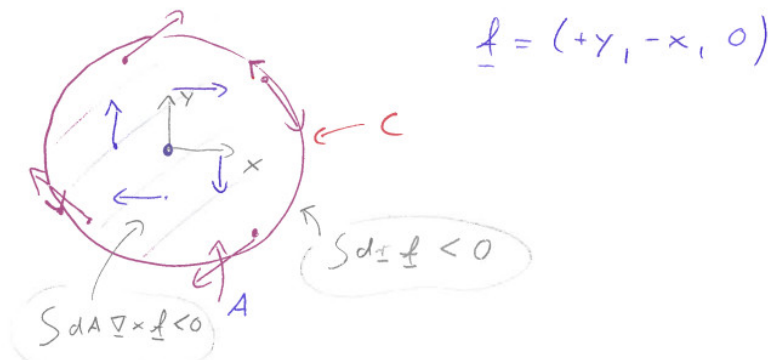
$$\int_A d\mathbf{A} \underbrace{\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r})}_{=(0,0,-2)} = -2\pi R^2 \quad (61)$$

$$\mathbf{r}(\lambda) = R \begin{pmatrix} +\cos(\lambda) \\ +\sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} = R \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ +\cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{f}(\mathbf{r}(\lambda)) = -R^2 \int_0^{2\pi} d\lambda = -2\pi R^2,$$

Satz von Stokes scheint also zu stimmen.

Bild - 015



- Beweisskizze: Hausaufgabe.

***** 31. Oktober 2025 (6. Vorlesung) *****

2.8 Feldgleichungen (Fortsetzung)

- Bestimmung von $\nabla \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ auch für $\mathbf{r} = 0$:

- Betrachte dazu

$$\int_V d^3r \nabla \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \dots \quad (62)$$

(V ist Kugel im Ursprung mit Radius $R > 0$; Ergebnis unabhängig vom Radius, da $\nabla \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3 = 0$ für $\mathbf{r} \neq 0$).

- Satz von Gauß:

$$\dots = \oint_A d\mathbf{A} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = R^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_r \frac{\mathbf{e}_r}{R^2} = 4\pi. \quad (63)$$

- Auch für $R \rightarrow 0$ gilt

$$\int_V d^3r \nabla \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = 4\pi, \quad (64)$$

damit

$$\nabla \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad \text{bzw.} \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (65)$$

- Beweis nicht korrekt, da Satz von Gauß stetig differenzierbares $\mathbf{f}$ erfordert, im vorliegenden Fall aber $\mathbf{f} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ nicht stetig differenzierbar bei $\mathbf{r} = 0$; also bestenfalls ein Plausibilitätsargument.
- Echter Beweis zeitaufwändig: Betrachte z.B. keine Punktladung, sondern homogen geladene Kugel mit Radius R , wiederhole obige Überlegungen, bilde am Ende Grenzwert $R \rightarrow 0$ (eventuell Hausaufgabe).

- Fortsetzung von (49):

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \underbrace{\nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}_{4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = 4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (66)$$

- Außerdem:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \underbrace{\nabla \times \nabla \Phi(\mathbf{r})}_{=0} = 0. \quad (67)$$

- Zentrale Gleichungen der Elektrostatik, die Beziehung zwischen Ladungsdichte und E-Feld herstellen:

$$\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (68)$$

bzw.

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad , \quad \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (69)$$

(Teil eines Satzes von Gleichungen, die wir später als **Maxwell-Gleichungen** kennenlernten werden).

- Integrale Formen von (68) bzw. (69) mit Satz von Gauß bzw. Satz von Stokes:

$$\oint_A d\mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = 4\pi q_{\text{innerhalb von } V} \quad (70)$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_A d\mathbf{A} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (71)$$

((70) wird als **Gaußsches Gesetz** bezeichnet).

- Einsetzen von (44) in linke Gleichung von (68):

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}) \quad (72)$$

(wird als **Poisson-Gleichung** bezeichnet, für $\rho = 0$ als **Laplace-Gleichung**), ist äquivalent zu (68).

2.9 Feldlinien, Äquipotentialflächen

- Vektorfelder, z.B. $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, lassen sich durch Feldlinien $\mathbf{r}(\lambda)$ (Linien mit ausgezeichnete Richtung) graphisch veranschaulichen.

- Feldlinien $\mathbf{r}(\lambda)$ definiert durch

$$\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) = \left| \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \right| \left| \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) \right|, \quad (73)$$

d.h. sie folgen an jedem Raumpunkt $\mathbf{r}$ den durch $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ beschriebenen Vektorpfeilen, d.h. $d\mathbf{r}(\lambda)/d\lambda \parallel \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda))$ bzw. $d\mathbf{r}(\lambda)/d\lambda \times \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) = 0$.

- Elektrostatische Kraft auf Probeladung in Richtung der Feldlinien, Stärke der Kraft proportional zur Dichte der Feldlinien.
- Es gibt keine geschlossenen elektrischen Feldlinien.

- * Beweis durch Widerspruch.

- * Annahme: Es gibt eine geschlossene elektrische Feldlinie $\mathbf{r}(\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

- * Dann gilt aufgrund von (71)

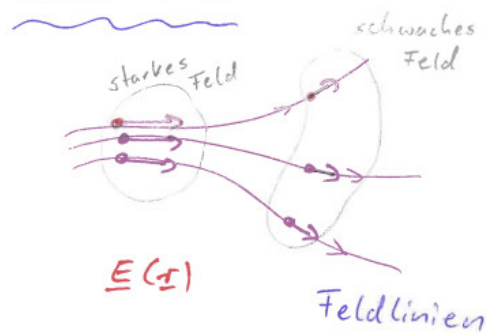
$$\int_0^1 d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) = \oint d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (74)$$

- * Außerdem gilt aufgrund von (73)

$$\int_0^1 d\lambda \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) = \int_0^1 d\lambda \underbrace{\left| \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \right|}_{>0} \underbrace{\left| \mathbf{E}(\mathbf{r}(\lambda)) \right|}_{>0} > 0. \quad (75)$$

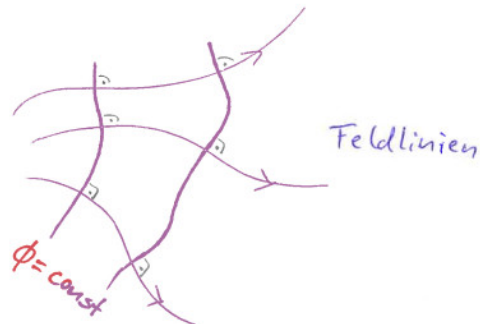
- * (74) und (75) im Widerspruch, d.h. Annahme muss falsch sein.

Bild - 016



- Gradientenfelder, z.B. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$, lassen sich durch Äquipotentialflächen von $\Phi(\mathbf{r})$ graphisch veranschaulichen.
 - Äquipotentialflächen definiert durch
$$\Phi(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (76)$$
 - Elektrostatische Kraft auf Probeladung und damit Feldlinien senkrecht zu Äquipotentialflächen.

Bild - 017



***** 4. November 2025 (7. Vorlesung) *****

2.10 Homogen geladene Kugel: Berechnung des E-Feldes

- Typische Fragestellung in Elektrostatik: Gegeben ist Ladungsverteilung ... wie lautet das zugehörige E-Feld bzw. elektrostatische Potential?
- Häufig mehrere Lösungswege, z.B.
 - (A) Mit Gaußschem Gesetz (70) (i.d.R. einfach, aber nur für hochgradig symmetrische Probleme anwendbar).
 - (B) Lösung der Poisson-Gleichung (72).
 - (C) Berechnung des Integrals (48).

- Betrachte im Folgenden homogen geladene Kugel mit Radius R und Ladung q , d.h.

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 = 3q/4\pi R^3 & \text{falls } |\mathbf{r}| < R \\ 0 & \text{falls } |\mathbf{r}| \geq R \end{cases} . \quad (77)$$

- **(A) Mit Gaußschem Gesetz:**

- Aufgrund von Rotationssymmetrie muss $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ gelten.
- Gaußsches Gesetz (70), V = Kugel um den Ursprung mit Radius r :

* Linke Seite:

$$\oint_A d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_r E(r) \mathbf{e}_r = 4\pi r^2 E(r). \quad (78)$$

* Rechte Seite:

$$4\pi q_{\text{innerhalb von } V} = \begin{cases} 4\pi(4\pi r^3/3)\rho_0 = 4\pi(r/R)^3 q & \text{falls } r < R \\ 4\pi(4\pi R^3/3)\rho_0 = 4\pi q & \text{falls } r \geq R \end{cases} . \quad (79)$$

* Damit

$$E(r) = \begin{cases} qr/R^3 & \text{falls } r < R \\ q/r^2 & \text{falls } r \geq R \end{cases} . \quad (80)$$

- E-Feld außerhalb der Kugel also ununterscheidbar von dem einer Punktladung q im Ursprung.

- **(B) Lösung der Poisson-Gleichung:**

- Aufgrund von Rotationssymmetrie muss $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r)$ gelten.
- Poisson-Gleichung (72) reduziert sich damit auf

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = -4\pi \rho(r) \quad (81)$$

(siehe Hausaufgabe zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik” im Wintersemester 2016/17, Blatt 2, Aufgabe 6).

- Für $\rho(r) = \rho_0$, d.h. für $r < R$, folgt

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\Phi_{<R}(r)}{dr} &= -\frac{4\pi\rho_0}{3} r^3 + C_1 = -\frac{q}{R^3} r^3 + C_1 \\ \Phi_{<R}(r) &= -\frac{q}{2R^3} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2. \end{aligned} \quad (82)$$

- Für $\rho(r) = 0$, d.h. für $r \geq R$, folgt

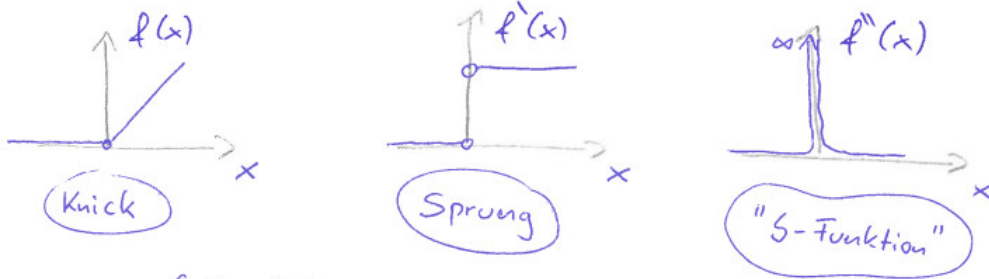
$$\Phi_{\geq R}(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4. \quad (83)$$

- Setze $C_4 = 0$ (eine Konstante kann willkürlich gewählt werden, Physik hängt nicht davon ab), damit $\Phi(r = \infty) = 0$.
- C_1/r entspricht Potential einer Punktladung im Ursprung, da nicht vorhanden $C_1 = 0$.

- Rechte Seite von (81) hat Sprung bei $r = R$, damit auch $(d/dr)(r^2 d\Phi/dr)$, damit hat $r^2 d\Phi/dr$ Knick bei $r = R$, damit auch $d\Phi/dr$, damit sind Φ und $\Phi' = d\Phi/dr$ stetig bei $r = R$:

$$\begin{aligned} \Phi_{<R}(R) &= \Phi_{\geq R}(R) \quad , \quad \Phi'_{<R}(R) = \Phi'_{\geq R}(R) \\ \rightarrow \left(-\frac{q}{2R^3}r^2 + C_2 = -\frac{C_3}{r} \right) \Big|_{r=R} \quad , \quad \left(-\frac{q}{R^3}r = \frac{C_3}{r^2} \right) \Big|_{r=R} \\ \rightarrow C_3 &= -q \quad , \quad C_2 = \frac{3q}{2R}. \end{aligned} \quad (84)$$

Bild - 018



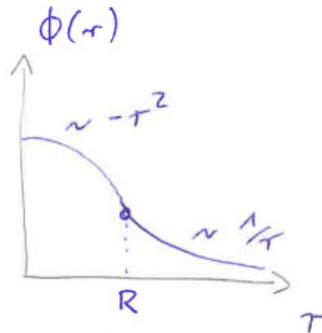
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{" } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \Theta(x) \quad (\text{Heaviside-Funktion})$$

$$f''(x) = \delta(x) \quad (\delta\text{-Funktion})$$

- Insgesamt

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{q}{2R^3}r^2 + \frac{3q}{2R} & \text{falls } r < R \\ \frac{q}{r} & \text{falls } r \geq R \end{cases}. \quad (85)$$

Bild - 019



- Aus $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ und $\Phi = \Phi(r)$ folgt $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ mit $E(r) = -d\Phi/dr$; Ausführen dieser Ableitung ergibt das bekannte Ergebnis (80).

- (C) **Berechnung des Integrals:**

- Siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden”, Abschnitt 9.2 und Hausaufgabe.

2.11 Energie einer Ladungsverteilung

- Um zwei unendlich weit entfernte Punktladungen q_1 und q_2 auf Abstand $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ aneinander heranzubringen, wird Energie

$$E_{12} = \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (86)$$

benötigt (bei negativem Vorzeichen gewinnt man Energie).

- Um eine dritte unendlich weit entfernte Punktladung q_3 nach $\mathbf{r}_3$ heranzubringen, wird zusätzlich Energie

$$E_{13} + E_{23} = \frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \quad (87)$$

benötigt.

- Verallgemeinerung für N Ladungen:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{q_j q_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}. \quad (88)$$

- Für kontinuierliche Ladungsverteilung ergibt sich damit

$$E = \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (89)$$

***** 7. November 2025 (8. Vorlesung) *****

- Einschränkung $j \neq k$ wurde beim Übergang von Summen zu Integralen nicht berücksichtigt ... zulässig?
- Annahme: $\rho(\mathbf{r}) < \rho_{\max}$, d.h. keine Unendlichkeiten, z.B. keine Beiträge von δ -Funktionen bzw. Punktladungen.
- Zusätzlicher “ $j = k$ ”-Beitrag im Integralausdruck entspricht $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'$, kann abgeschätzt werden,

$$\propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int d^3 r \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \epsilon} d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3 r \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \int_0^\epsilon d\tilde{r} \tilde{r}^2 \frac{\rho_{\max}^2}{\tilde{r}}}_{\substack{\propto \epsilon^2 \\ =0}}, \quad (90)$$

verschwindet also ohnehin und muss daher nicht ausgeschlossen werden.

- Einsetzen von (48) und (72), partielle Integration und Satz von Gauß, Einsetzen von (44):

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r (\Delta \Phi(\mathbf{r})) \Phi(\mathbf{r}) = \\
&= -\frac{1}{8\pi} \underbrace{\int d^3r \nabla \cdot ((\nabla \Phi(\mathbf{r})) \Phi(\mathbf{r}))}_{=\oint d\mathbf{A} (\nabla \Phi(\mathbf{r})) \Phi(\mathbf{r})=0} + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla \Phi(\mathbf{r}))^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}(\mathbf{r}))^2 \quad (91)
\end{aligned}$$

- Annahme dabei ist dass $\oint d\mathbf{A} (\nabla \Phi) \Phi = 0$, d.h. $(\nabla \Phi) \Phi$ für $r \rightarrow \infty$ hinreichend schnell verschwindet.
 - Z.B. für Punktladung erfüllt: $\Phi \propto 1/r$ und $\nabla \Phi \propto 1/r^2$, damit $(\nabla \Phi) \Phi \propto 1/r^3$; außerdem $\oint d\mathbf{A} \propto r^2$, daher $\oint d\mathbf{A} (\nabla \Phi) \Phi = 0$.
 - Für lokalisierte Ladungsverteilung (d.h. Ladungsverteilung, die nicht unendlich ausgedehnt ist), ebenfalls erfüllt (kann man mit Multipolentwicklung zeigen, siehe Abschnitt 2.16).
- (91) legt Interpretation von

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}(\mathbf{r}))^2 \quad (92)$$

als Energiedichte des E-Feldes nahe (wird später mit dem Noether-Theorem gezeigt, siehe Abschnitt ??).

2.12 Elektrostatistische Randwertprobleme

- Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}) \quad (93)$$

ist inhomogene lineare DGL.

- Allgemeine Lösung ist $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r})$, setzt sich zusammen aus
 - $\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) = \sum_j A_j \Phi_j(\mathbf{r})$, lineare Superposition aller linear unabhängigen Lösungen $\Phi_j(\mathbf{r})$ der homogenen DGL

$$\Delta \Phi_j(\mathbf{r}) = 0 \quad (94)$$

(davon gibt es unendlich viele),

- einer beliebigen Partikulärlösung von (93) (auch davon gibt es unendlich viele, denn beliebige Linearkombination homogener Lösungen kann addiert werden), z.B.

$$\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (95)$$

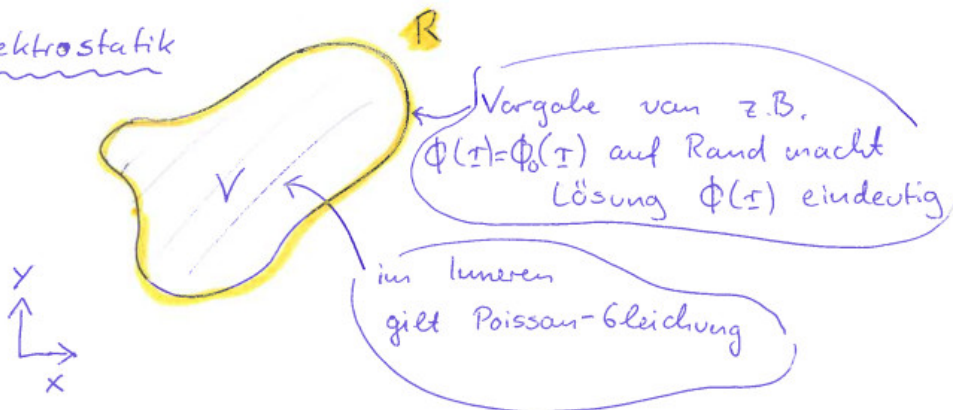
(siehe auch “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden”, Abschnitt 3.6).

- Lösung wird erst durch Vorgabe von Randbedingungen (RBs) eindeutig bzw. nahezu eindeutig festgelegt.

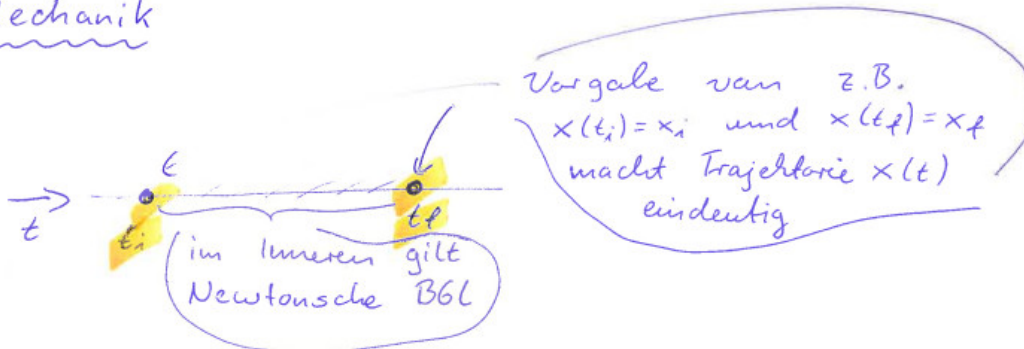
- Betrachte Volumen $\mathcal{V}$, innerhalb dessen die Poisson-Gleichung (93) erfüllt sein soll.
- Vorgabe von RBs auf $\mathcal{R}$, dem Rand von $\mathcal{V}$.
- Z.B. Vorgabe des Feldes $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r})$ für $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$.
 - * Sogenannte **Dirichlet RBs**.
 - * Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ wird dadurch eindeutig festgelegt (Beweis in Fließbach, “Elektrodynamik”, Kapitel 7).
- Z.B. Vorgabe der Ableitung des Feldes senkrecht zum Rand $(\nabla\Phi(\mathbf{r}))\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \partial\Phi(\mathbf{r})/\partial\hat{\mathbf{n}} = \Phi'_0(\mathbf{r})$ für $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$.
 - * Sogenannte **Neumann RBs**.
 - * Lösung $\Phi(\mathbf{r})$ wird dadurch bis auf additive Konstante eindeutig festgelegt, diese ist physikalisch irrelevant (Beweis in Fließbach, “Elektrodynamik”, Kapitel 7).
- Diese Sorte Problem heißt **Randwertproblem (RWP)**.
- Analogie Mechanik:
 - * Allgemeine Lösung der Newtonschen BGl liefert Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ mit zwei unbestimmten Konstanten pro Raumdimension.
 - * Vorgabe von Anfangsbedingungen, z.B. $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f$ (entsprechen Dirichlet RBs in der Zeit), legt Lösung eindeutig fest.

Bild - 020

Elektrostatik

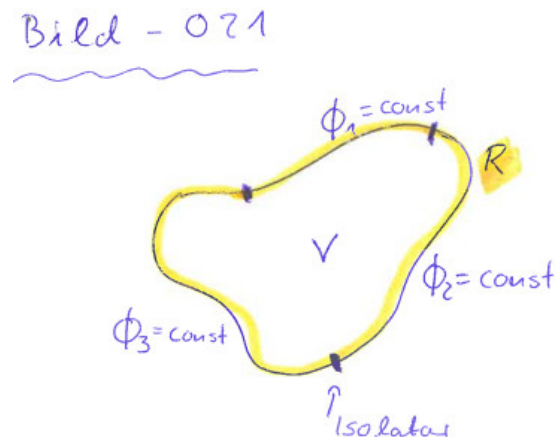


Mechanik



- Bisher war $\mathcal{V}$ unendlich ausgedehnter Raum, $\mathcal{R}$ “Rand im Unendlichen”, eine “Kugel mit unendlichem Radius”, mit Dirichlet RBs $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$.
- Beispiel: Punktladung im Ursprung.
 - $\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) = q/|\mathbf{r}|$, $\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) = 0$, damit RBs $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ erfüllt.
 - Wäre auch Lösung für $\mathcal{V} = \text{“Kugel mit Radius } R\text{”}$ und Dirichlet RBs $\Phi(r = R) = q/R$.
 - Andere mögliche Lösungen der homogenen DGL (94) sind z.B.

$$\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) = \Phi_0 e^{+\lambda_x x} \sin(\lambda_y y) \sin(\lambda_z z) \quad (96)$$
 mit $\lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \lambda_z^2 = 0$, dann wären obige RBs aber nicht mehr erfüllt, sondern andere RBs.
 - Wie man unendlich viele Lösungen der homogenen Poisson-Gleichung findet und diese dann so linear kombiniert, dass vorgegebene RBs erfüllt werden, wird in Abschnitt 2.14 und 2.15 diskutiert.
- Physikalisch kann Rand $\mathcal{R}$ mit Dirichlet RBs z.B. durch umgebende leitende Metallplatte realisiert werden.
 - Im Metall gilt $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ und damit $\Phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$
 - Ist $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0$, bewegen sich die im Metall in hinreichender Menge vorhandenen frei beweglichen Ladungen (Elektronen) entgegen der Richtung von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und bauen damit ein Gegenfeld gleicher Stärke auf.
 - Der Rand kann auch durch mehrere voneinander isolierte Metallplatten gebildet werden, die unterschiedliche konstante Potentiale $\Phi_1 \neq \Phi_2 \neq \dots$ ($\Phi_1 = \text{const.}$, $\Phi_2 = \text{const.}$, ...) aufweisen.



***** 11. November 2025 (9. Vorlesung) *****

- E-Feld am Rand von $\mathcal{V}$ für den Fall umgebender leitender Metallplatten ($E(\mathbf{r}) = 0$ im Metall):

– Tangentialkomponente:

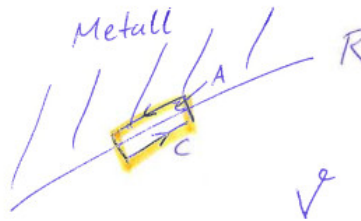
- * Verwende (71) (“Satz von Stokes”) gemäß Abbildung, A ist infinitesimales Rechteck (infinitesimal entlang der Seiten, die von V ins Metall führen):

$$\oint_C d\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{da die Gleichung in der Zeile vorher für alle } C \text{ gilt}) \quad (97)$$

($\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E} - (\mathbf{E}\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ die Normale der Randfläche ist).

Bild - 022



– Normalkomponente:

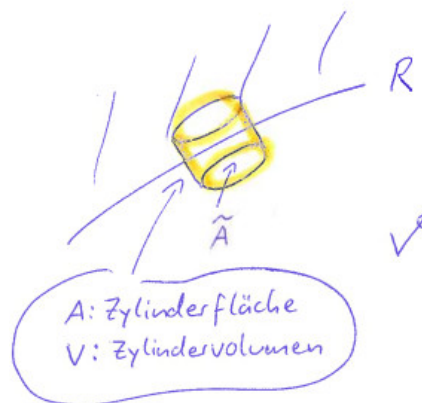
- * Verwende Gaußsches Gesetz (70) gemäß Abbildung, V ist Zylinder mit infinitesimaler Höhe und einem Radius, der klein gegenüber der Skala ist, auf der das elektrische Feld sich verändert:

$$\oint_A d\mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q_{\text{innerhalb von } V}$$

$$\rightarrow E_{\perp}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} = \frac{4\pi q_{\text{innerhalb von } V}}{\tilde{A}} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}) \quad (98)$$

($\mathbf{E}_{\perp} = (\mathbf{E}\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ die nach außen gerichtete Normale der Randfläche ist; $\sigma(\mathbf{r})$ ist Flächenladungsdichte an Metalloberfläche bei $\mathbf{r}$).

Bild - 023



- * Flächenladungsdichte nicht vorgegeben, wird stattdessen durch Ladungen im Inneren von $\mathcal{V}$ generiert, kann nach Lösung des RWPs, d.h. nach Berechnung von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in $\mathcal{V}$, mit (98) bestimmt werden.
- * (98) kann auch für elektrostatisches Potential $\Phi(\mathbf{r})$ formuliert werden:

$$E_{\perp}(\mathbf{r}) = -\left(\nabla\Phi(\mathbf{r})\right)\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\hat{\mathbf{n}}} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}). \quad (99)$$

- **Faraday-Käfig:**

- Ladungsfreies von geschlossener Metallhülle umgebenes Volumen.
- $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 = \text{const}$ im Metall (Dirichlet RBs).
- $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 = \text{const}$ löst außerdem Poisson-Gleichung (93) mit $\rho(\mathbf{r}) = 0$, d.h. Lösung im von der Metallhülle umgebenen Volumen.
- Damit $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 = \text{const}$ bzw. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = 0$ im Faraday-Käfig, ein Faraday-Käfig schirmt E-Felder also vollständig ab.

2.13 Kondensator

- **Kondensator:**

- Zwei metallische Körper mit elektrostatischen Potentialen $\Phi_1 = \text{const}$ und $\Phi_2 = \text{const}$.
- Ein anwendungsbezogenes elektrostatisches RWP (eventuell muss zusätzlich noch $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ vorgegeben werden).

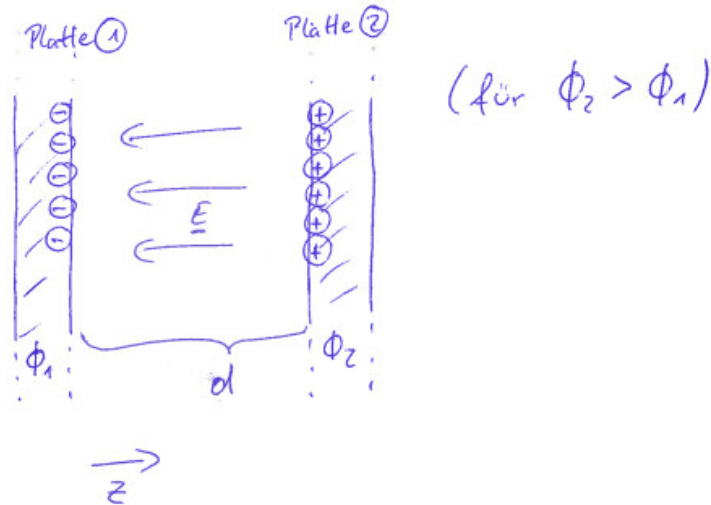
- Um Ladung q von Körper 1 zu Körper 2 zu verschieben, muss Energie $\Delta E = q(\Phi_2 - \Phi_1)$ aufgewendet werden (Ladung bewegt sich in Potential $V = q\Phi$).

- Potentialdifferenz $U_{21} = \Phi_2 - \Phi_1$ bezeichnet man als **Spannung**. Damit $\Delta E = qU_{21}$.

- **Plattenkondensator:**

- Zwei unendlich ausgedehnte Metallplatten, parallel zur x - y -Ebene, Abstand d .

Bild - 024



- Berechnung des elektrostatischen Potentials bzw. des E-Feldes zwischen den Platten: Hausaufgabe, Blatt 4, Aufgabe 15, lineares Potential, $\mathbf{E} = -((\Phi_2 - \Phi_1)/d)\mathbf{e}_z = -(U_{21}/d)\mathbf{e}_z$.
- Ladungsdichte auf Metallplatten: $\sigma = \pm|\mathbf{E}|/4\pi = \pm U_{21}/4\pi d$ (falls $\Phi_2 > \Phi_1$: positive Ladungsdichte für Platte 2, negative Ladungsdichte für Platte 1).
- Endliche Plattenfläche A (obige Überlegungen dann nur noch näherungsweise gültig), Ladung auf Metallplatten: $q = \sigma A = \pm U_{21}A/4\pi d$.

- **Kapazität** eines Kondensators:

$$C = \frac{\text{Ladung}}{\text{Spannung}} = \left| \frac{q}{U_{21}} \right|. \quad (100)$$

- Kapazität eines Plattenkondensators:

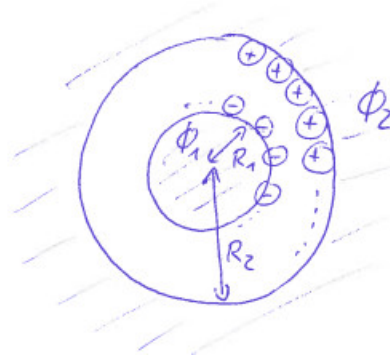
$$C = \frac{A}{4\pi d} \quad (101)$$

(hängt also nur von Geometrie, d.h. Plattenfläche A und Abstand d , ab).

- **Kugelkondensator:**

- Zwei konzentrische Metallkugeln, Radien R_1 und $R_2 > R_1$.

Bild - 025



- Berechnung von elektrostatischem Potential, E-Feld, Ladungsdichte, Ladung und Kapazität: Hausaufgabe, Blatt 4, Aufgabe 16.

2.14 Laplace-Gleichung in 2 Raumdimensionen: Polarkoordinaten

2.14.1 Motivation

- Betrachte elektrostatisches RWP aus Abschnitt 2.12, d.h. finde $\Phi(\mathbf{r})$, das Folgendes erfüllt:
 - Poisson-Gleichung im Volumen $\mathcal{V}$ für darin vorgegebene Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$, d.h.

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{V}. \quad (102)$$
 - Dirichlet-RBs auf dem Rand von $\mathcal{V}$, d.h.

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{R}. \quad (103)$$

- Lösung des RWP ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}), \quad (104)$$

wobei partikuläre Lösung z.B.

$$\Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (105)$$

- Dann ist $\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r})$ so zu bestimmen, dass Folgendes erfüllt ist:

- Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{V}. \quad (106)$$

- RBs

$$\Phi_{\text{homogen}}(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) - \Phi_{\text{partikulär}}(\mathbf{r}) = \tilde{\Phi}_0(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \mathcal{R}. \quad (107)$$

- Studiere in diesem Abschnitt das verbleibende durch (106) und (107) gegebene Problem in 2 Raumdimensionen, d.h. $\mathbf{r} = (x, y)$ (Rechnungen einfacher, Konzepte aber identisch zu 3 Raumdimensionen [siehe Abschnitt 2.15]).

2.14.2 Polarkoordinaten

- Ist $\mathcal{V}$ Kreis (Radius R) bzw. $\mathcal{R}$ Rand dieses Kreises, bietet sich Verwendung von Polarkoordinaten $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$ an.
- Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten (siehe Hausaufgabe zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik” im Wintersemester 2016/17, Blatt 2, Aufgabe 6):

$$\Delta \Phi(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (108)$$

- Dirichlet RBs:

$$\Phi(r = R, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\varphi). \quad (109)$$

2.14.3 Separationsansatz

- Häufig funktionierender Ansatz zur Lösung “einfacher” partieller DGLs: **Separationsansatz**,

$$\Phi(r, \varphi) = R(r)Y(\varphi), \quad (110)$$

d.h. gesuchte Funktion (hier $\Phi(r, \varphi)$) wird als Produkt von Funktionen (hier $R(r)$ und $Y(\varphi)$) geschrieben, die jeweils nur von einer Koordinate abhängen.

- Einsetzen in (108), Multiplikation mit $r^2/R(r)Y(\varphi)$:

$$\begin{aligned} Y(\varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + R(r) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Y(\varphi)}{\partial \varphi^2} &= 0 \\ \rightarrow \frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) &= - \frac{1}{Y(\varphi)} \frac{\partial^2 Y(\varphi)}{\partial \varphi^2} = C = \text{const} \end{aligned} \quad (111)$$

(linke Seite von (111) ist Funktion von r , rechte Seite von (111) ist Funktion von φ , müssen also gleich einer Konstante sein [wesentliche Eigenschaft, nur dann ist ein Separationsansatz zielführend]).

- DGL für $Y(\varphi)$:

$$\frac{d^2 Y(\varphi)}{d\varphi^2} = -CY(\varphi) \quad (112)$$

(DGL hat gleiche Form wie die des HO).

- Unabhängige Lösungen:

$$Y_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m = \pm\sqrt{C}, \quad m = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots \quad (113)$$

– Komplexe Exponentialfunktionen praktischer als reelle sin- und cos-Funktionen.

- $m \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ garantiert 2π -Periodizität im Winkel φ , d.h. $Y_m(\varphi + 2\pi) = Y_m(\varphi)$.
- Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ nicht notwendig, aber zweckmäßig (Normierung, siehe Abschnitt 2.14.4).
- $Y(\varphi) = \varphi$ ist auch Lösung von (112) für $C = 0$, erfüllt aber Periodizitätsbedingung $Y_m(\varphi + 2\pi) = Y_m(\varphi)$ nicht, daher im Folgenden nicht relevant.

***** 14. November 2025 (10. Vorlesung) *****

- DGl für $R(r)$:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) = m^2 R(r). \quad (114)$$

- Unabhängige Lösungen:

- Ansatz: $R(r) = r^\alpha$.
- Einsetzen in (114):

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & \underbrace{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dr^\alpha}{dr} \right)}_{\substack{\alpha r^\alpha \\ = \alpha^2 r^\alpha}} = m^2 r^\alpha \\ \rightarrow \quad & \alpha = \pm m. \end{aligned} \quad (115)$$

- Damit

$$R_m(r) = r^m \quad \text{bzw.} \quad R_m(r) = \frac{1}{r^m}. \quad (116)$$

- (114) ist lineare gewöhnliche DGl 2. Ordnung, daher keine weiteren linear unabhängigen Lösungen für $m \neq 0$.
- Für $m = 0$ liefert Ansatz $R(r) = r^\alpha$ nur eine Lösung, $R_0(r) = 1$, zweite Lösung ist $R_0(r) = \ln(r/r_0)$ (r_0 ist beliebige aus Dimensionsgründen notwendige konstante Länge).

- Da Laplace-Gleichung (108) lineare DGl, gilt lineare Superposition, d.h. allgemeine komplexe Lösung

$$\Phi(r, \varphi) = A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + B_0 \frac{\ln(r/r_0)}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m \neq 0} \left(A_m r^{|m|} + B_m \frac{1}{r^{|m|}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi} \quad (117)$$

(r_0 und A_0 nicht unabhängig [wähle irgendeine für das Problem typische Länge, z.B. $r_0 = R$, Lösung (117) trotzdem noch allgemein]; Betragsstriche bei Exponenten nicht notwendig, aber zweckmäßig: A_m [$m \neq 0$] beziehen sich dann auf positive r -Potenzen, B_m [$m \neq 0$] auf negative r -Potenzen).

- Ziel ist nun Bestimmung von A_m und B_m so, dass RBs (109) erfüllt (dazu benötigt man Kenntnisse über vollständige Orthonormalsysteme).

2.14.4 Vollständige Orthonormalsysteme

- Funktionen können als Vektoren mit unendlich vielen Einträgen interpretiert werden: statt Vektor f_j (im Folgenden stets Komponentenschreibweise, d.h. j indiziert Komponenten von $\mathbf{f}$) Funktion $f(x)$, diskreter Index j wird durch Argument bzw. kontinuierlichen Index x ersetzt.
- Im Folgenden häufig verwendete Operation ist Skalarprodukt:

- Skalarprodukt zweier Vektoren $f_j^{(1)}$ und $f_j^{(2)}$:

$$\sum_j (f_j^{(1)})^* f_j^{(2)} \quad (118)$$

(bei Beschränkung auf reelle Zahlen kann $*$ weggelassen werden).

- **Skalarprodukt zweier Funktionen** $f^{(1)}(x)$ und $f^{(2)}(x)$ (Definitionsbereich $x \in [a, b]$) ist analog zu (118) definiert,

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \int_a^b dx f^{(1)*}(x) f^{(2)}(x) \quad (119)$$

((..., ...) ist übliche Notation für Skalarprodukt zweier Funktionen).

- Orthonormalbasis (ONB) eines Vektorraums (linear unabhängige Basisvektoren $g_j^{(n)}$) äquivalent zu **vollständigem Orthonormalsystem (VONS)** eines Funktionenraums (linear unabhängigen Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$), wobei n Basisvektoren bzw. Basisfunktionen indiziert.
- Wesentliche Eigenschaften einer ONB bzw. eines VONS:

- **Orthonormalität:**

- * ONB: Basisvektoren müssen paarweise orthogonal und auf Länge 1 normiert sein,
- $$\sum_j (g_j^{(m)})^* g_j^{(n)} = \delta_{mn}. \quad (120)$$

- * VONS: Analog muss für Basisfunktionen

$$(g^{(m)}, g^{(n)}) = \int_a^b dx (g^{(m)})^*(x) g^{(n)}(x) = \delta_{mn} \quad (121)$$

gelten.

- **Vollständigkeit:**

- * ONB: Basisvektoren müssen vollständig sein, d.h. beliebiger Vektor f_j muss eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar sein,

$$\sum_n (g_j^{(n)})^* g_k^{(n)} = \delta_{jk} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\sum_n (\mathbf{g}^{(n)})^* \otimes \mathbf{g}^{(n)}}_{\text{dyadisches Produkt}} = \mathbb{1}. \quad (122)$$

- Vektor f_j lässt sich wie folgt als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:

$$f_j = \sum_n A_n g_j^{(n)} \quad (123)$$

mit Koeffizienten

$$A_n = \sum_j (g_j^{(n)})^* f_j. \quad (124)$$

- Beweis durch Einsetzen und Verwenden von (122):

$$\sum_n A_n g_j^{(n)} = \sum_n \left(\sum_k (g_k^{(n)})^* f_k \right) g_j^{(n)} = \sum_k f_k \underbrace{\sum_n (g_k^{(n)})^* g_j^{(n)}}_{=\delta_{kj}} = f_j. \quad (125)$$

***** 18. November 2025 (11. Vorlesung) *****

- * VONS: Analog muss für Basisfunktionen

$$\sum_n (g^{(n)})^*(x) g^{(n)}(y) = \delta(x - y) \quad (126)$$

gelten.

- Funktion $f(x)$ lässt sich wie folgt als Linearkombination der Basisfunktionen darstellen:

$$f(x) = \sum_n A_n g^{(n)}(x) \quad (127)$$

mit Koeffizienten

$$A_n = (g^{(n)}, f) = \int_a^b dx (g^{(n)}(x))^* f(x). \quad (128)$$

- Beweis: Hausaufgabe.

- Beispiel eines VONS:

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{+2\pi i n x / L}, \quad (129)$$

$n \in \mathbb{Z}$, wenn Definitionsbereich $x \in [a, b]$ mit $L = b - a$ und die darzustellenden Funktionen periodische RBs aufweisen.

- Nachweis der Orthonormalität und Vollständigkeit: Hausaufgabe.
- Darstellung einer Funktion $f(x)$ als Linearkombination der Basisfunktionen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n A_n e^{+2\pi i n x / L} \quad \text{mit} \quad A_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b dx e^{-2\pi i n x / L} f(x). \quad (130)$$

- $f(x)$ und die unendlich vielen A_n enthalten die gleiche Information.
- (130) nennt man **Fourier-Reihe**, Darstellung einer Funktion durch “sin- und cos-Funktionen”, sehr häufig und wichtig, vor allem in Quantenmechanik.

2.14.5 Anpassen der allgemeinen Lösung an RBs

- A_m und B_m in allgemeiner Lösung (117) müssen so bestimmt werden, dass RBs (109) erfüllt, d.h. $\Phi(r = R, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\varphi)$.
- Da $\mathcal{V}$ Kreis, der Ursprung enthält, dürfen singuläre Terme $\ln(r/r_0)$ und $1/r^{|m|}$ in (117) nicht in Lösung auftreten, d.h. $B_m = 0$ bzw.

$$\Phi(r, \varphi) = A_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{m \neq 0} A_m r^{|m|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi}. \quad (131)$$

- Lösung auf Rand $\mathcal{R}$:

$$\Phi(r = R, \varphi) = \sum_m A_m R^{|m|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi} \quad (132)$$

(ist Darstellung als Linearkombination der Funktionen $e^{+im\varphi}$).

- Mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung der A_m :

– 1. Möglichkeit:

- * Entwickle vorgegebene RBs $\tilde{\Phi}_0(\varphi)$ nach Basisfunktionen

$$g^{(m)}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+im\varphi} \quad (133)$$

(bilden VONS, siehe Abschnitt 2.14.4),

$$\tilde{\Phi}_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_m C_m e^{+im\varphi} \quad \text{mit} \quad C_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi) \quad (134)$$

(selbst wenn Integrale zur Bestimmung von C_m nicht analytisch gelöst werden können, ist es leicht, diese mit einem Computer zu berechnen).

- * Koeffizientenvergleich von (132) und (134) ergibt

$$A_m R^{|m|} = C_m \rightarrow A_m = \frac{C_m}{R^{|m|}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} R^{|m|}} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi). \quad (135)$$

– 2. Möglichkeit:

- * Startpunkt ist

$$\Phi(r = R, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\varphi). \quad (136)$$

- * Skalarprodukt von $e^{+im\varphi}/\sqrt{2\pi}$ mit beiden Seiten von (136):

• Linke Seite:

$$\begin{aligned} (e^{+im\varphi}/\sqrt{2\pi}, \Phi(r = R)) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi} \sum_n A_n R^{|n|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+in\varphi} = \\ &= \sum_n A_n R^{|n|} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+in\varphi}}_{=(e^{+im\varphi}/\sqrt{2\pi}, e^{+in\varphi}/\sqrt{2\pi})=\delta_{mn}} = A_m R^{|m|} \end{aligned} \quad (137)$$

((132) wurde verwendet).

• Rechte Seite:

$$(e^{+im\varphi}/\sqrt{2\pi}, \tilde{\Phi}_0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi). \quad (138)$$

- * Damit

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi} R^{|m|}} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi) \quad (139)$$

(identisch zu (135)).

- Beide Möglichkeiten verwenden, dass Lösung auf Rand $\mathcal{R}$ (Gleichung (132)) Linearkombination von Funktionen ist, die VONS bilden.

- Falls nicht der Fall, sind weitere Schritte notwendig, z.B. Orthonormalisierung der die Lösung bildenden Terme mit Gram-Schmidt'schem Orthogonalisierungsverfahren (siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidt'sches_Orthogonalisierungsverfahren).

- Beispiel:

- Gegeben: Dirichlet RBs,

$$\Phi(r = R, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\varphi) = \alpha \sin(3\varphi) = \frac{\alpha\sqrt{2\pi}}{2i} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+3i\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-3i\varphi} \right) \quad (140)$$

(ein sehr einfaches Beispiel, bei dem Integrale (135) analytisch lösbar bzw. direkt ablesbar sind, außerdem fast alle A_m verschwinden).

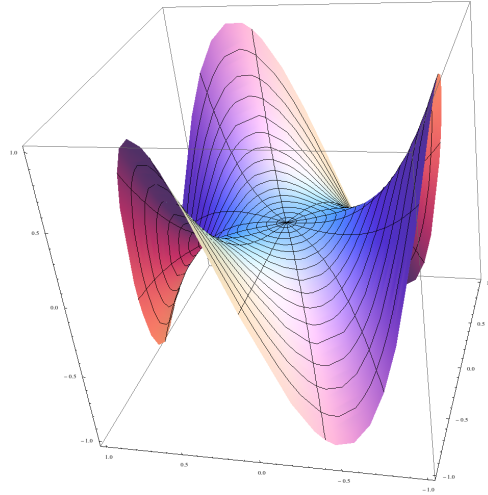
- Verwende Orthonormalität der Funktionen $e^{+im\varphi}/\sqrt{2}$, damit

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}R^{|m|}} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} \tilde{\Phi}_0(\varphi) = \begin{cases} -\alpha\sqrt{2\pi}/2iR^3 & \text{falls } m = -3 \\ +\alpha\sqrt{2\pi}/2iR^3 & \text{falls } m = +3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (141)$$

- Lösung der Laplace-Gleichung durch Einsetzen in (131):

$$\Phi(r, \varphi) = A_{-3}r^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-3i\varphi} + A_{+3}r^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+3i\varphi} = \alpha \left(\frac{r}{R} \right)^3 \sin(3\varphi) \quad (142)$$

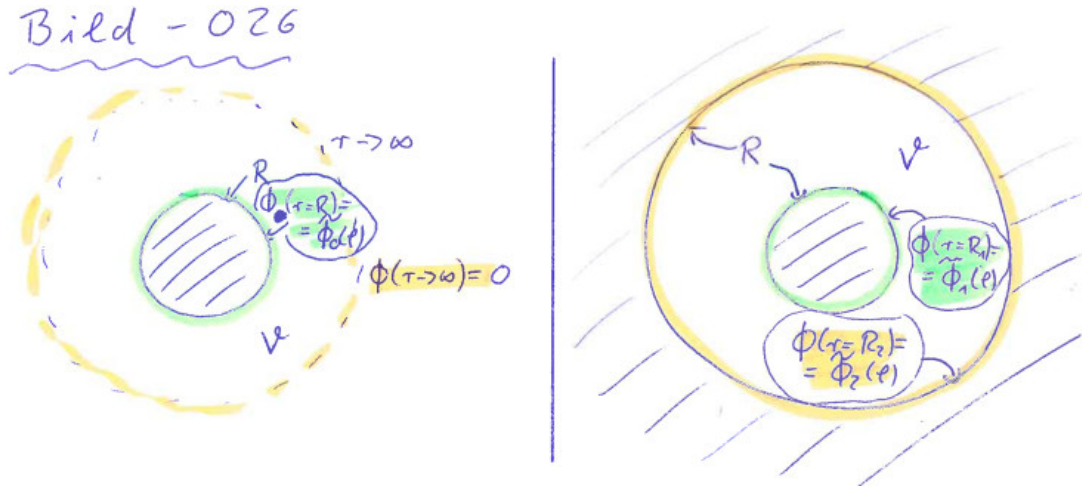
(Abbildung zeigt $\Phi(r, \varphi)$ für $R = 1$ und $\alpha = 1$).



- Folgende ähnliche RWPs können analog gelöst werden:

- $\mathcal{V}$ ist gesamter 2-dimensionaler Raum bis auf Kreis mit Radius R :
Vorgabe von Dirichlet-RBs $\Phi(r = R, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\varphi)$ und $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$.
- $\mathcal{V}$ ist Kreisring, innerer Radius R_1 , äußerer Radius R_2 :
Vorgabe von Dirichlet-RBs $\Phi(r = R_1, \varphi) = \tilde{\Phi}_1(\varphi)$ und $\Phi(r = R_2, \varphi) = \tilde{\Phi}_2(\varphi)$.

Siehe Hausaufgabe zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik” im Wintersemester 2016/17, Blatt 6, Aufgabe 22.



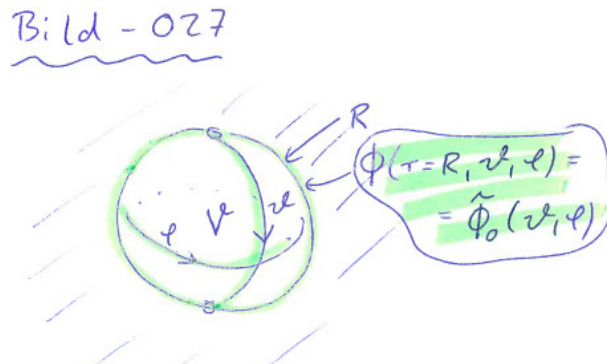
2.15 Laplace-Gleichung in 3 Raumdimensionen: Kugelkoordinaten

2.15.1 Motivation

- Wie in Abschnitt 2.14.1.

2.15.2 Kugelkoordinaten

- Ist $\mathcal{V}$ Kugel (Radius R) bzw. $\mathcal{R}$ Rand dieser Kugel, bietet sich Verwendung von Kugelkoordinaten $x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$ und $z = r \cos(\vartheta)$ an.



- Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (siehe Hausaufgabe zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik” im Wintersemester 2016/17, Blatt 2, Aufgabe 6):

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(r, \vartheta, \varphi) &= \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Phi(r, \vartheta, \varphi)) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \Phi(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \Phi(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (143)$$

- Dirichlet RBs:

$$\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\vartheta, \varphi). \quad (144)$$

2.15.3 Separationsansatz

- Separationsansatz

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} P(\cos(\vartheta)) Q(\varphi) \quad (145)$$

führt auf drei unabhängige gewöhnliche DGLs (Faktor $1/r$ und Verwendung von $\cos(\vartheta)$ als Argument nicht notwendig, vereinfacht aber DGLs).

- DGL für $Q(\varphi)$:

$$\frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -C Q(\varphi). \quad (146)$$

- Unabhängige Lösungen:

$$Q_m(\varphi) = e^{+im\varphi}, \quad m = \pm\sqrt{C}, \quad m = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots \quad (147)$$

- DGL für $P(x)$ mit $x = \cos(\vartheta)$:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0. \quad (148)$$

- Unabhängige Lösungen: **Zugeordnete Legendrepolynome**,

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad \lambda = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\ m = -l, -l+1, -l+2, \dots, +l-2, +l-1, +l. \quad (149)$$

- DGL für $R(r)$:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0. \quad (150)$$

- Unabhängige Lösungen:

$$R_l(r) = r^{l+1} \quad \text{bzw.} \quad R_l(r) = \frac{1}{r^l}. \quad (151)$$

- Allgemeine komplexe Lösung der Laplace-Gleichung (143):

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \quad (152)$$

mit den **Kugelflächenfunktionen**

$$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\vartheta)) e^{+im\varphi}. \quad (153)$$

- Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$:

- Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators:

$$\left(\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi). \quad (154)$$

- Häufig und daher wichtig in Physik, nicht nur in Feldtheorie, z.B. auch in Quantenmechanik bei Atomorbitalen.
- $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ (Definitionsbereich $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) beschreiben Schwingungen auf Einheitskugel, analog zu $\sin(n\varphi)$ und $\cos(n\varphi)$ (Definitionsbereich $\varphi \in [0, 2\pi]$), die Schwingungen auf Einheitskreis beschreiben (Englische Bezeichnung für $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ ist **Spherical Harmonics**):

$$Y_{0,0}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (155)$$

$$Y_{1,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\vartheta) \quad , \quad Y_{1,\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\vartheta) e^{\pm i\varphi} \quad (156)$$

$$Y_{2,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2(\vartheta) - 1) \quad , \quad \dots \quad (157)$$

(graphische Darstellung und weitere Eigenschaften:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelflächenfunktionen>).

- Orthonormal und vollständig.

2.15.4 Anpassen der allgemeinen Lösung an RBs

- A_{lm} und B_{lm} in allgemeiner Lösung (152) müssen so bestimmt werden, dass RBs (144), d.h. $\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\vartheta, \varphi)$, erfüllt.
- Da $\mathcal{V}$ Kugel, die Ursprung enthält, dürfen singuläre Terme $1/r^{l+1}$ in (152) nicht in Lösung auftreten, d.h. $B_{lm} = 0$ bzw.

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A_{lm} r^l Y_{l,m}(\vartheta, \varphi). \quad (158)$$

- Lösung auf Rand $\mathcal{R}$:

$$\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A_{lm} R^l Y_{l,m}(\vartheta, \varphi). \quad (159)$$

- Bestimmung der A_{lm} :

- Startpunkt ist

$$\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = \tilde{\Phi}_0(\vartheta, \varphi). \quad (160)$$

- Skalarprodukt von $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ mit beiden Seiten von (160):

- * Linke Seite:

$$\begin{aligned} (Y_{l,m}, \Phi(r = R)) &= \\ &= \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi (Y_{l,m}(\vartheta, \varphi))^* \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{+l'} A_{l'm'} R^{l'} Y_{l',m'}(\vartheta, \varphi) = \\ &= \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{+l'} A_{l'm'} R^{l'} \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi (Y_{l,m}(\vartheta, \varphi))^* Y_{l',m'}(\vartheta, \varphi)}_{=(Y_{l,m}, Y_{l',m'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}} = \\ &= A_{lm} R^l \end{aligned} \quad (161)$$

(Orthonormalität der Y_{lm} wurde verwendet).

- * Rechte Seite:

$$(Y_{l,m}, \tilde{\Phi}_0) = \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi (Y_{l,m}(\vartheta, \varphi))^* \tilde{\Phi}_0(\vartheta, \varphi). \quad (162)$$

- Damit

$$A_{lm} = \frac{1}{R^l} \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi (Y_{l,m}(\vartheta, \varphi))^* \tilde{\Phi}_0(\vartheta, \varphi). \quad (163)$$

2.16 Multipolentwicklung

- Entwicklung des elektrostatischen Potentials $\Phi(\mathbf{r})$ einer um den Ursprung lokalisierten Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ ($\rho(\mathbf{r}) = 0$ für $|\mathbf{r}| > R$) für große Abstände, d.h. $|\mathbf{r}| \gg R$.

Bild - 028



Ladungsdichte
 $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$

• $\phi(\mathbf{r}) = ?$
(weit entfernt
von Ladungen)

- Startpunkt ist (48),

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (164)$$

- Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2 + (r'/r)^2}} = \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(-2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2 + (r'/r)^2 \right) + \frac{3}{8} \left(-2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2 \right)^2 + \mathcal{O}((r'/r)^3) \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{r}')^2}{2r^4} + \mathcal{O}((r'/r)^3) \right), \end{aligned} \quad (165)$$

wobei

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} = \frac{1}{1+\epsilon/2-\epsilon^2/8+\mathcal{O}(\epsilon^3)} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (166)$$

verwendet wurde.

- Einsetzen in (164):

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r} \underbrace{\int d^3r' \rho(\mathbf{r}')}_{=Q \text{ Monopol}} + \frac{r_j}{r^3} \underbrace{\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'_j}_{p_j \text{ Dipol}} + \frac{1}{2} \frac{r_j r_k}{r^5} \underbrace{\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3r'_j r'_k - r'^2 \delta_{jk})}_{Q_{jk} \text{ Quadrupol}} \\ &\quad + \mathcal{O}(1/r^4) \end{aligned} \quad (167)$$

(kartesische Multipolentwicklung).

- Das Fernfeld der Ladungsverteilung kann damit durch einige wenige Größen charakterisiert bzw. mit den entsprechenden Termen approximiert werden:

- **Gesamtladung** Q
(1 Größe, $\propto 1/r$),
- **Dipolmoment** $\mathbf{p}$
(3 Größen, $\propto 1/r^2$),
- **Quadrupolmoment** Q_{jk}
(5 unabhängige Größen [$Q_{jk} = Q_{kj}$, symmetrisch; $\sum_j Q_{jj} = 0$, spurlos], $\propto 1/r^3$),
- ...

- **Dipol:**

- Ladungen $+q$ und $-q$ im Abstand d , z.B. $+q$ bei $\mathbf{r}_+ = (0, 0, +d/2)$ und $-q$ bei $\mathbf{r}_- = (0, 0, -d/2)$.
- Ladungsdichte: $\rho(\mathbf{r}) = +q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_+) - q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_-)$.
- Gesamtladung: $Q = 0$ (offensichtlich).

- Dipolmoment:

$$\mathbf{p} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = q(0, 0, d). \quad (168)$$

- **Punktdipol:** Grenzwert $d \rightarrow 0$ so dass $\mathbf{p} = \text{const}$ (damit $q \propto 1/d$, d.h. $q \rightarrow \infty$); alle höheren Momente verschwinden.

Bild - 029



- **Quadrupol:**

- Hausaufgabe.

- **Sphärische Multipolentwicklung:**

- Potential $\Phi(\mathbf{r})$ für $r > R$ (d.h. außerhalb der Ladungsverteilung) erfüllt Poisson-Gleichung $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$, verschwindet außerdem im Unendlichen, d.h. $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$.
- $\Phi(\mathbf{r})$ für $r > R$ kann damit gemäß (152) mit $A_{lm} = 0$ dargestellt werden,

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi). \quad (169)$$

- Koeffizienten B_{lm} können berechnet werden, Ergebnis ist

$$B_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} q_{lm} \quad (170)$$

mit den **sphärischen Multipolmomenten**

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r r^l (Y_{l,m}(\vartheta, \varphi))^* \rho(r, \vartheta, \varphi). \quad (171)$$

- * 1 sphärisches Multipolmoment q_{00} , Beitrag zu $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ ist $\propto 1/r$ (entspricht Gesamtladung, d.h. $q_{00} = Q$).
- * 3 sphärische Multipolmomente q_{1m} , Beitrag zu $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ ist $\propto 1/r^2$ (entsprechen Dipolmoment $\mathbf{p}$).
- * 5 sphärische Multipolmomente q_{2m} , Beitrag zu $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ ist $\propto 1/r^3$ (entsprechen Quadrupolmoment Q_{jk}).