
Klausur zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik”

20. März 2026

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten. Die Klausur ist mit 25 oder mehr Punkten bestanden.

Aufgabe 1 (2+2+2+1+3+2=12 Punkte)

(a) Berechne

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{r} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2\sigma^2}\right)\right). \quad (1)$$

(b) Betrachte die zeitabhängige elektrische Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}, t) = A(t) \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2(\sigma(t))^2}\right). \quad (2)$$

($\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\sigma(t) > 0$). Bestimme den Vorfaktor $A(t)$ so, dass die Ladungsdichte die Gesamtladung Q beschreibt.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \quad \text{für } a > 0. \quad (3)$$

(c) Beschreibe die durch Gleichung (2) beschriebene Ladungsverteilung und ihre Zeitabhängigkeit für $t \geq 0$ für den Fall $\sigma(t=0) > 0$ und $\dot{\sigma}(t) > 0$ in Worten.
(Zwei bis drei aussagekräftige Sätze, eventuell ergänzt durch eine Skizze, sind hier ausreichend.)

(d) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung, die elektrische Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und elektrische Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ in Verbindung setzt?

(e) Berechne eine physikalisch zulässige zur Ladungsdichte (2) gehörige Stromdichte.

Hinweis: Dein Ergebnisse aus Teilaufgabe (a) und Teilaufgabe (b) sind hierfür hilfreich.

(f) Zeige, dass für eine elektrische Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und eine elektrische Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, die die Kontinuitätsgleichung erfüllen, und für die $\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ für $|\mathbf{r}| \geq R$ gilt ($R > 0$ ist ein fest vorgegebener Radius), die Gesamtladung zeitlich erhalten ist.

Lösung 1(a)

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{r} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2\sigma^2}\right)\right) = \left(3 - \frac{\mathbf{r}^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4)$$

Lösung 1(b)

$$Q = \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) = A(t) \left(\int dx \exp \left(- \frac{x^2}{2(\sigma(t))^2} \right) \right)^3 = A(t) \left(2\pi(\sigma(t))^2 \right)^{3/2}. \quad (5)$$

Damit

$$A(t) = \frac{Q}{(2\pi(\sigma(t))^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

Lösung 1(c)

Es handelt sich um eine radialsymmetrische Ladungsverteilung mit Gaußschem Profil. Die Breite der Gaußverteilung nimmt zu, d.h. die durch die Ladungsdichte beschriebenen Ladungen laufen radial auseinander. Eine Gaußsche Form (maximale Ladungsdichte im Ursprung) bleibt stets erhalten.

Lösung 1(d)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (7)$$

Lösung 1(e)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho &= \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(\sigma(t))^3} \exp \left(- \frac{\mathbf{r}^2}{2(\sigma(t))^2} \right) = \\ &= \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}} \left(- \frac{3}{(\sigma(t))^4} + \frac{\mathbf{r}^2}{(\sigma(t))^6} \right) \dot{\sigma}(t) \exp \left(- \frac{\mathbf{r}^2}{2(\sigma(t))^2} \right) = \\ &= \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\dot{\sigma}(t)}{(\sigma(t))^4} \left(- 3 + \frac{\mathbf{r}^2}{(\sigma(t))^2} \right) \exp \left(- \frac{\mathbf{r}^2}{2(\sigma(t))^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Damit und unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe (a) folgt eine zulässige Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\dot{\sigma}(t)}{(\sigma(t))^4} \mathbf{r} \exp \left(- \frac{\mathbf{r}^2}{2(\sigma(t))^2} \right). \quad (9)$$

Lösung 1(f)

$$\frac{\partial}{\partial t}Q = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) = \int d^3r \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = - \int d^3r \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = - \oint d\mathbf{A} \underbrace{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}_{=0} = 0 \quad (10)$$

(das Integrationsvolumen bzw. die Integration über dessen Oberfläche kann z.B. eine um den Ursprung zentrierte Kugel bzw. Kugelschale mit Radius R sein).

Alternativ kann man auch den Satz von Gauß in 4 Dimensionen (Raum und Zeit) verwenden mit einem zylindrischen Integrationsvolumen.

Aufgabe 2 (6+2=8 Punkte)

Betrachte die partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) Z(x, t) = 0 \quad (11)$$

(v und m sind reelle positive Konstanten).

- (a) Bestimme mit Hilfe eines Separationsansatzes die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (11) für ein komplexwertiges Feld $Z(x, t)$.

Hinweis: Für die Rechnung in dieser und der folgenden Teilaufgabe ist es zweckmäßig, die beim Separationsansatz auftretende Konstante so zu wählen, dass die resultierende rein x -abhängige Gleichung

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 \quad (12)$$

lautet. Ferner ist die abkürzende Definition $\omega = \sqrt{(m^2 + k^2)v^2}$ praktisch.

- (b) Bestimme die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung (11) für ein reellwertiges Feld $Z(x, t)$.

Lösung 2(a)

Separationsansatz: $Z(x, t) = X(x)T(t)$.

Damit

$$\frac{\ddot{T}(t)}{v^2 T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} + m^2 = 0 \quad (13)$$

bzw.

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -(m^2 + k^2)v^2 = -\omega^2 \quad , \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2. \quad (14)$$

$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t)$ wird durch $T(t) = e^{\pm i\omega t}$ gelöst.

$X''(x) = -k^2 X(x)$ wird durch $X(x) = e^{\pm ikx}$ gelöst.

Die allgemeine Lösung für komplexwertiges Feld $Z(x, y, t)$ lautet damit

$$Z(x, t) = \int dk \left(a(k) e^{+i(\omega t + kx)} + b(k) e^{-i(\omega t + kx)} \right) \quad (15)$$

($a(k)$ und $b(k)$ sind dabei unbestimmte komplexwertige Koeffizientenfunktionen, die durch Angabe geeigneter Anfangsbedingungen festgelegt werden würden).

Lösung 2(b)

$$b(k) = a^*(k), \text{ d.h.}$$

$$Z(x, t) = \int dk \left(a(k) e^{+i(\omega t + kx)} + \text{c.c.} \right) \quad (16)$$

(c.c. steht für einen entsprechenden komplex konjugierten Term; es verbleibt nur eine der beiden unbestimmten komplexwertigen Koeffizientenfunktionen).

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2+2=12 Punkte)

- (a) Wie lautet die Fourier-Transformation und die zugehörige Fourier-Rücktransformation für eine Funktion $f(x)$?
- (b) Berechne die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = A\delta(x - x_0)$.
-

- (c) Drücke den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ durch die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Felds aus, d.h. gib eine 4×4 -Matrix für $F^{\mu\nu}$ an, deren Einträge E_j und B_j enthalten.

Berechne bzw. vereinfache die folgenden Ausdrücke und drücke sie durch die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Felds aus:

- (d) $\epsilon_{01\rho\sigma} F^{01} F^{\rho\sigma}$.
- (e) $\partial_\mu F^{\mu\nu}$.
- (f) $A_\mu A_\nu F^{\mu\nu}$.

Lösung 3(a)

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{+ikx} f(x) \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{-ikx} \tilde{f}(k). \quad (17)$$

(andere Konventionen bei Vorfaktoren bzw. Vorzeichen in den Exponenten sind ebenfalls zulässig, sofern Transformation und Rücktransformation zueinander invers sind).

Lösung 3(b)

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{+ikx} A\delta(x - x_0) = \frac{Ae^{+ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (18)$$

Lösung 3(c)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Lösung 3(d)

$$\epsilon_{01\rho\sigma}F^{01}F^{\rho\sigma} = F^{01}F^{23} - F^{01}F^{32} = 2F^{01}F^{23} = 2E_xB_x. \quad (20)$$

Lösung 3(e)

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{1}{c}\partial_t F^{01} + \partial_y F^{21} + \partial_z F^{31} = -\frac{1}{c}\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = -\frac{1}{c}\partial_t E_x + \left(\operatorname{rot} \mathbf{B}\right)_x \quad (21)$$

(der letzte Schritt, d.h. die Verwendung der Rotation, ist optional).

Lösung 3(f)

$$A_\mu A_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (22)$$

(weil $A_\mu A_\nu$ symmetrisch und $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist).

Aufgabe 4 (2+8=10 Punkte)

Gegeben ist ein zeitabhängiges elektrisches Feld im Vakuum mit den drei Komponenten

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \int dk f(k) \sin(k(ct - z)) \quad , \quad E_y(\mathbf{r}, t) = 0 \quad , \quad E_z(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (23)$$

mit nicht näher spezifizierter reeller Funktion $f(k)$.

- (a) Zeige mathematisch oder begründe in Worten, dass $\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ gilt.
- (b) Bestimme mit Hilfe der verbleibenden Maxwell-Gleichungen die physikalisch zulässigen zugehörigen magnetischen Feldkonfigurationen.
Beachte, dass das zugehörige $\mathbf{B}$ -Feld nicht eindeutig, aber durch das gegebene $\mathbf{E}$ -Feld stark eingeschränkt ist. Der zeitabhängige Anteil des $\mathbf{B}$ -Felds ist eindeutig und deshalb auszurechnen und präzise anzugeben. Für den zeitunabhängigen Teil, der nicht eindeutig festliegt, ist die Angabe einer allgemeinen Lösung nicht unbedingt erforderlich. Stattdessen ist auch die Angabe von einfachen und sehr bekannten Differentialgleichungen ausreichend, denen der zeitunabhängige Teil genügen muss.

Lösung 4(a)

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \partial_x E_x(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (24)$$

(weil $E_x(\mathbf{r}, t)$ nicht von x abhängt).

Lösung 4(b)

Es ist zweckmäßig mit der folgenden Maxwell-Gleichung zu starten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_z E_x(\mathbf{r}, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \int dk f(k) \cos(k(ct - z)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \int dk f(k) \sin(k(ct - z)) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

wobei $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ ein zeitunabhängiges, d.h. statisches Feld ist.

Die Maxwell-Gleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = +\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (26)$$

reduziert sich bei Verwendung von (25) auf

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = 0 \tag{27}$$

wie zu sehen ist bzw. leicht durch Einsetzen überprüft werden kann.

Die letzte verbleibende Maxwell-Gleichung

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{28}$$

reduziert sich bei Verwendung von (25) auf

$$\text{div } \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = 0. \tag{29}$$

Zusammengefasst: Das zugehörige magnetische Feld hat die Form (25), wobei $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ ein statisches magnetisches Feld ist, das die bekannten Gleichungen der Magnetostatik erfüllt.

Nebenbemerkung: Beim angegebenen elektrischen Feld handelt es sich um einen Spezialfall des in der Vorlesung diskutierten Lichtstrahls. Das zugehörige zeitabhängige magnetische Feld ist ebenfalls das des Lichtstrahls. Das zusätzlich mögliche statische Magnetfeld spiegelt die vielfach diskutierte lineare Superposition von Lösungen im Vakuum wider.

Aufgabe 5 (2+2+3+1=8 Punkte)

Betrachte in dieser Aufgabe stets eine Welt mit nur 1 Raumdimension.

- (a) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form im Vakuum in einer solchen Welt mit nur 1 Raumdimension?
- (b) Wie viele Komponenten hat das elektrische Feld? Wie viele Komponenten hat das magnetische Feld? Drücke den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ durch die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Felds aus, d.h. gib eine Matrix für $F^{\mu\nu}$ an, deren Einträge die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Felds enthalten.
- (c) Leite ausgehend von Deinen Ergebnissen bzw. Antworten in Teilaufgabe (a) und (b) die Maxwell-Gleichungen für elektrische und magnetische Felder für 1 Raumdimension ab.
- (d) Gib die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen in 1 Raumdimension an.

Lösung 5(a)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Lösung 5(b)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E(x,t) \\ +E(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

d.h. das elektrische Feld hat eine Komponente E , das magnetische Feld existiert nicht.

Lösung 5(c)

$$0 = \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_1 F^{10} = \partial_x E(x,t) = 0 \quad (31)$$

$$0 = \partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_0 F^{01} = -\frac{1}{c} \partial_t E(x,t) = 0, \quad (32)$$

d.h. kompakt zusammengefasst $\partial_x E = 0$ und $\partial_t E = 0$.

Lösung 5(d)

$$E(x,t) = E_0 = \text{const.}$$