
Klausur zu “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik”

24. Februar 2026

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten. Die Klausur ist mit 25 oder mehr Punkten bestanden.

Aufgabe 1 (2+4+2=8 Punkte)

Das kubische Volumen V in drei Raumdimensionen ist definiert durch $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq z \leq L$.

Betrachte im Folgenden das Volumenintegral

$$I = \int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

(wie üblich $\mathbf{r} = (x, y, z)$) mit dem (stetig differenzierbaren) Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = x^2 y \mathbf{e}_x \quad (2)$$

($\mathbf{e}_x$ ist der Einheitsvektor in x -Richtung).

- (a) Schreibe das Volumenintegral I in ein Oberflächenintegral um. Beschreibe dabei alle von Dir verwendeten Symbole bzw. Größen kurz aber präzise in Worten.
- (b) Berechne I indem Du das in Teilaufgabe (a) von Dir angegebene Oberflächenintegral löst.
- (c) Verifiziere Dein Ergebnis aus Teilaufgabe (b), indem Du I erneut auf anderem Weg berechnest, diesmal durch Lösen des zu Beginn der Aufgabe angegebenen Volumenintegrals.

Lösung 1(a)

$$I = \oint_{\partial V} d\mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

- $\oint_{\partial V}$: Integration über die Oberfläche des kubischen Volumens V .
- $d\mathbf{A} = dA \mathbf{n}$, wobei dA ein infinitesimales Flächenstück ist und $\mathbf{n}$ die zugehörige Flächennormale bezeichnet.

Lösung 1(b)

Zu integrieren ist über die sechs Seiten des Würfels. Die vier Seiten parallel zur x - y - bzw. x - z -Ebene liefern keinen Beitrag da deren Flächennormale senkrecht zum Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ steht. Die Seite in der Ebene $x = 0$ liefert ebenfalls keinen Beitrag, da dort $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0$ gilt. Damit

$$I = \int_0^L dy \int_0^L dz \mathbf{e}_x \mathbf{f}(\mathbf{r}) \Big|_{x=L} = L^2 \left(\int_0^L dy y \right) \left(\int_0^L dz \right) = \frac{L^5}{2}. \quad (4)$$

Lösung 1(c)

Mit $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = 2xy$ folgt

$$I = 2 \left(\int_0^L dx \, x \right) \left(\int_0^L dy \, y \right) \left(\int_0^L dz \right) = \frac{L^5}{2}. \quad (5)$$

Aufgabe 2 (2+3+2+5=12 Punkte)

- (a) Gib die Differentialgleichung an, die die Greenschen Funktionen des Laplace-Operators Δ in 3 Raumdimensionen definiert. Gib eine solche Greensche Funktion an.
- (b) Eine um den Ursprung zentrierte Kugelschale (Radius R) ist homogen geladen (Gesamtladung Q). Gib die zugehörige Ladungsdichte an. Verwende dabei Kugelkoordinaten. Verifiziere Dein Ergebnis, indem Du diese Ladungsdichte über den gesamten Raum integrierst.
- (c) Gib für das zugehörige elektrostatische Potential mit Hilfe der Greenschen Funktion aus Teilaufgabe (a) einen Integralausdruck an.
- (d) Berechne den Integralausdruck aus Teilaufgabe (c).

Lösung 2(a)

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (6)$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{-4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (7)$$

Lösung 2(b)

$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R). \quad (8)$$

Verifikation:

$$\int d^3r \rho(r) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R) = Q. \quad (9)$$

Lösung 2(c)

Die Poisson-Gleichung lautet

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Damit

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \left(-4\pi \rho(r') \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (11)$$

Lösung 2(d)

Lösung des Integrals im Wesentlichen analog zur Hausaufgabe (Aufgabenblatt 3, Aufgabe 1(i)).

Wähle zunächst $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ mit $z \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi(0, 0, z) &= 2\pi \int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\vartheta' \sin(\vartheta') \frac{-Q}{R^2} \delta(r' - R) \frac{1}{-4\pi(z^2 - 2zr' \cos(\vartheta') + r'^2)^{1/2}} = \\
 &= \frac{Q}{2} \int_0^\pi d\vartheta' \sin(\vartheta') \frac{1}{(z^2 - 2zR \cos(\vartheta') + R^2)^{1/2}} = \\
 &= \frac{Q}{2zR} (z^2 - 2zR \cos(\vartheta') + R^2)^{1/2} \Big|_0^\pi = -\frac{Q}{8\pi zR} (|z + R| - |z - R|) = \\
 &= \begin{cases} Q/R & \text{für } z \leq R \\ Q/z & \text{für } z > R \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{12}$$

Aufgrund der vorliegenden Rotationssymmetrie gilt

$$\phi(r) = \begin{cases} Q/R & \text{für } r \leq R \\ Q/r & \text{für } r > R \end{cases} . \tag{13}$$

Aufgabe 3 (4+2+2+4=12 Punkte)

Betrachte zwei unendlich ausgedehnte Platten parallel zur x - y -Ebene im Abstand d . Die Platte bei $z = -d/2$ hat Flächenladungsdichte $-\sigma$, die Platte bei $z = +d/2$ hat Flächenladungsdichte $+\sigma$.

- (a) Berechne mit dem Gaußschen Gesetz das elektrische Feld zwischen den Platten.
- (b) Wie lauten die Komponenten des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ ausgedrückt durch die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Felds? (In anderen Worten: Gib für den Feldstärketensor eine 4×4 -Matrix an, wobei Du in geeigneter Weise die Komponenten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ einträgst.)
- (c) Wie lautet die Lorentz-Transformation $\Lambda^\mu{}_\nu$, die einen Boost in x -Richtung mit Geschwindigkeit v beschreibt? Gib die entsprechende 4×4 -Matrix an.
- (d) Berechne die z -Komponente des elektrischen Felds, die ein Beobachter misst, der sich mit Geschwindigkeit v in x -Richtung zwischen den beiden Platten bewegt. Wende dazu die Boost-Matrix aus Teilaufgabe (c) auf den entsprechenden Feldstärketensor (Teilaufgaben (a) und (b)) an.

Lösung 3(a)

Aus Symmetriegründen $\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z$.

Gaußsches Gesetz:

$$\oint d\mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q_{\text{innerhalb von } V}. \quad (14)$$

Platte bei $-d/2$:

- Aus Symmetriegründen $\mathbf{E} = -E_z \mathbf{e}_z$ für $z < -d/2$, $\mathbf{E} = +E_z \mathbf{e}_z$ für $z > -d/2$.
- Beliebige entlang der Achsen ausgerichtete Box, die von der Platte geschnitten wird,

$$\begin{aligned} \oint d\mathbf{A} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 2AE_z = -4\pi\sigma A \\ \rightarrow E_z &= -2\pi\sigma. \end{aligned} \quad (15)$$

Platte bei $+d/2$: Analog, $\mathbf{E} = -E_z \mathbf{e}_z$ für $z < +d/2$, $\mathbf{E} = +E_z \mathbf{e}_z$ für $z > +d/2$, $E_z = +2\pi\sigma$.

Lineare Superposition liefert das elektrische Feld zwischen den Platten,

$$\mathbf{E} = -4\pi\sigma \mathbf{e}_z. \quad (16)$$

Lösung 3(b)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Lösung 3(c)

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Lösung 3(d)

Da bis auf F^{30} und F^{03} alle Komponenten von $F^{\mu\nu}$ verschwinden gilt

$$E'_z = F'^{30} = \Lambda^3{}_\mu \Lambda^0{}_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^3{}_3 \Lambda^0{}_0 F^{30} + \underbrace{\Lambda^3{}_0}_{=0} \underbrace{\Lambda^0{}_3}_{=0} F^{03} = \gamma E_z. \quad (19)$$

(Nebenbemerkung: Es kommt zur Längenkontraktion der Platten in x -Richtung um den Faktor γ ; die Flächenladungsdichten im System des sich bewegenden Beobachters sind damit $\pm\gamma\sigma$; dies erklärt das erzielte Ergebnis $E'_z = \gamma E_z$.)

Aufgabe 4 (8+2=10 Punkte)

Die zeitliche Entwicklung eines reellen Felds $f(x, t)$ wird durch die Differentialgleichung

$$a^2 \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) = 0 \quad (20)$$

mit $a^2 > 0$ beschrieben. Es liegen die Randbedingungen $f(x = 0, t) = f(x = L, t) = 0$ vor.

- (a) Bestimme mit Hilfe eines Separationsansatzes die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
- (b) Bestimme $f(x, t)$ für die Anfangsbedingung $f(x, t = 0) = A \sin(2\pi x/L) + B \sin(3\pi x/L)$.

Lösung 4(a)

Separationsansatz: $f(x, t) = X(x)T(t)$.

Damit

$$a^2 \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -c^2. \quad (21)$$

$X''(x) = -c^2 X(x)$ wird durch unter Einbeziehung der Randbedingungen durch $X(x) = \sin(n\pi x/L)$, $n = 1, 2, \dots$ gelöst, wobei $c^2 = (n\pi/L)^2$.

$\dot{T}(t) = (-c^2/a^2)T(t) = -(n\pi/La)^2 T(t)$ wird entsprechend durch $T(t) = \exp(-(n\pi/La)^2 t)$ gelöst.

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$f(x, t) = \sum_{n \geq 1} C_n \sin(n\pi x/L) \exp(-(n\pi/La)^2 t). \quad (22)$$

Lösung 4(b)

Das gesuchte $f(x, t)$ ergibt sich durch Setzen von $t = 0$ in der allgemeinen Lösung und Koeffizientenvergleich mit der gegebenen Anfangsbedingung, d.h.

$$f(x, t) = A \sin(2\pi x/L) \exp(-(2\pi/La)^2 t) + B \sin(3\pi x/L) \exp(-(3\pi/La)^2 t). \quad (23)$$

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

Gegeben ist das Viererpotential

$$A_\mu = \delta_{\mu 0} \frac{q}{|\mathbf{r}|} + \lambda \partial_\mu \left(2 + \tanh(\alpha t^3 |\mathbf{r}|^2) \right)^{-1} \quad (24)$$

(λ , α und β sind reelle Konstanten).

- (a) Gib das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}$ und magnetische Feld $\mathbf{B}$ an. Welcher Ladungs- und Stromverteilung entspricht das angegebene Viererpotential A_μ ?
- (b) Bestimme ein eichäquivalentes Viererpotential A'_μ , das temporale Eichung erfüllt.

Lösung 5(a)

Der Term $\lambda \partial_\mu \dots$ ist physikalisch bedeutungslos, da er die Struktur einer Eichtransformation hat ($A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$), kann also ignoriert werden.

Der verbleibende Term hat nur einen Beitrag zur 0-Komponente, die, wenn zeitunabhängig, dem elektrostatischen Potential ϕ entspricht.

$\phi = q/|\mathbf{r}|$ beschreibt eine im Ursprung ruhende Punktladung q mit zugehörigem $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ und $\mathbf{B} = 0$. Ströme gibt es keine.

Alternativ: Ausrechnen von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ über $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. (“im Ursprung ruhende Punktladung q ”, “keine Ströme” ist auch bei diesem Weg zu nennen)

Lösung 5(b)

Eichtransformation: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$.

Temporale Eichung $A'_0 = 0$.

Damit kann Λ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{q}{|\mathbf{r}|} + \partial_0 \Lambda \\ \rightarrow \quad \Lambda &= -\frac{q}{|\mathbf{r}|} ct. \end{aligned} \quad (25)$$

Für $A'_\mu = (A_0, -\mathbf{A})$ folgt

$$A_0 = 0 \quad , \quad -\mathbf{A} = \nabla \Lambda = \frac{q\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} ct. \quad (26)$$

(Nebenbemerkung: Das Ergebnis kann leicht durch erneutes Ausrechnen von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ über $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$ verifiziert werden.)