Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

WiSe 2025 / 2026 – Prof. Marc Wagner

Michael Eichberg: eichberg@itp.uni-frankfurt.de
Vilija de Jonge: dejonge@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 11

Abgabe am 23.01.2026, Besprechung in der Woche vom 26.01.2026.

Aufgabe 1 [*Feldstärketensor und dualer Feldstärketensor*] (6+4=10 Pkt.)

(i) Betrachte den Ausdruck

$$\mathcal{L} = \#F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{1}$$

als Kandidat für die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik. Dabei ist $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ der in der Vorlesung eingeführte duale Feldstärketensor.

(a) Zeige, dass $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ invariant unter Lorentz-Transformationen[1] ist, d.h. dass $\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.
Hinweis: Überlege, wie Du die Determinante einer Lorentz-Transformation Λ mit Hilfe von $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ in Komponentenschreibweise formulieren kannst.

(b) Drücke $\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus. Drücke $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus.
Hinweis: Im Lauf der Rechnung ist es zweckmäßig, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ durch das dreikomponentige ϵ_{jkl} auszudrücken.

(c) Ist $\mathcal{L}$ Lorentz-invariant? Ist $\mathcal{L}$ eichinvariant? Ist $\mathcal{L}$ paritätsinvariant? Warum eignet sich $\mathcal{L}$ nicht als Lagrange-Dichte oder Teil einer Lagrange-Dichte, die die Elektrodynamik beschreibt?

(ii) Betrachte nun

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \#(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 \, . \tag{2}$$

Ist $\mathcal{L}$ Lorentz-invariant, eichinvariant und paritätsinvariant? Wie lauten die Feldgleichungen? Welche mathematische Schwierigkeit, die in den Maxwell-Gleichungen nicht vorhanden ist, tritt auf, wenn man diese Feldgleichungen lösen will?

Aufgabe 2 [*Homogene Maxwell-Gleichungen*] (4 Pkt.)

Leite ausgehend von der kovarianten Form

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

[1] Damit sind hier *eigentliche orthochrone* Lorentz-Transformationen gemeint, also solche, welche sich aus Boosts und Rotationen zusammensetzen. Die Transformationen $P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, $T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ und PT erfüllen auch $\eta = \Lambda^T\eta\Lambda$, gehören aber nicht zu der Zusammenhangskomponente der Lorentz-Gruppe, welche die Identität enthält. Sie beschreiben keine Transformationen zwischen zwei physikalisch realisierbaren Inertialsystemen.

die in der Vorlesung bereits angegebenen homogenen Maxwell-Gleichungen ausgedrückt durch E-Felder und B-Felder her.

Aufgabe 3 [*Viererstromdichte*] (4+2=6 Pkt.)

Zeige exemplarisch, dass sich $j^\mu(x) = (c\rho(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t))$ unter Lorentz-Transformationen wie ein Vierervektor verhält, d.h. dass die Vergabe eines oberen griechischen Index μ an j gerechtfertigt ist. Betrachte dazu

(i) eine im Inertialsystem Σ ruhende homogen geladene Kugel (Ladungsdichte ρ_0),

(ii) einen im Inertialsystem Σ auf der x-Achse liegenden homogen geladenen Draht (Linienladungsdichte λ_0, verschwindender Strom).

Das Inertialsystem Σ' bewegt sich relativ zu Σ in x-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v. Gib für die beiden genannten Fälle sowohl j^μ als auch j'^μ an (verwende für j'^μ Dein Wissen über Längenkontraktion) und zeige danach, dass j^μ und j'^μ über eine entsprechende Lorentz-Transformation verbunden sind.