Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

WiSe 2025 / 2026 – Prof. Marc Wagner

Michael Eichberg: eichberg@itp.uni-frankfurt.de
Vilija de Jonge: dejonge@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 9

Abgabe am 09.01.2026, Besprechung in der Woche vom 12.01.2026.

Aufgabe 1 [*Verschiedenes zur Magnetostatik*] (2+2+1+3=8 Pkt.)

Betrachte zunächst einen unendlich langen, geraden, zylinderförmigen Draht (Radius R), durch den der Strom I fließt (die Stromdichte ist innerhalb des Drahtes räumlich konstant).

(i) Berechne das zugehörige magnetische Feld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ mit Hilfe des Amperechen Gesetzes. Überlege Dir dazu zunächst, welche Symmetrien die Struktur des magnetischen Feldes einschränken.

(ii) Das Vektorpotential eines magnetischen Punktdipols lautet

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \,. \tag{1}$$

Berechne und skizziere das magnetische Feld des Punktdipols.

Untersuche als nächstes eine im Ursprung zentrierte Kugel (Radius R), die homogen geladen ist (Gesamtladung q) und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ rotiert.

(iii) Bestimme die zugehörige Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$.

(iv) Durch die Rotation wird ein B-Feld erzeugt. Berechne das zugehörige Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ für $r > R$.
Hinweis: Nutze die in der Vorlesung hergleitete Integralformel für $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. Beim Lösen des Integrals kann sich folgende Formel als hilfreich erweisen:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \, \frac{u}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'ru}} = \frac{2r'}{3r^2} \quad (r > r') \,. \tag{2}$$

Aufgabe 2 [*Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen*] (1+1+2=4 Pkt.)

(i) Zeige, dass d^4x Lorentz-invariant ist, d.h. $\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}^4x$ für zwei Intertialsysteme Σ und Σ' gilt.

(ii) Leite

$$(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \tag{3}$$

her, indem Du die definierende Eigenschaft von Lorentz-Transformationen

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\nu} \tag{4}$$

benutzt.

(iii) Zeige, dass $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ein kovarianter Vierervektor ist, d.h. für Lorentz-Transformationen Λ

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \tag{5}$$

gilt. (Ausgangspunkt Deines Beweises sollte $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ sein).

Aufgabe 3 [*Boost in beliebiger Richtung*] (2+3+3=8 Pkt.)

(i) Leite durch Hintereinanderausführung von zwei parallelen Boosts die in der Vorlesung bestimmte Formel zur relativistischen Kombination (Addition) von gleichgerichteten Geschwindigkeiten her.

(ii) Ziel dieser Teilaufgabe ist es, die Matrix für einen Boost in beliebiger Richtung aufzustellen. Betrachte dazu das Bezugssystem Σ', welches sich mit der Geschwindigkeit $c\boldsymbol{\beta}$ relativ zum Bezugssystem Σ bewegt.

(a) Betrachte den Vektor $\boldsymbol{r}$ im Bezugssystem Σ, der sich als als $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp$ darstellen lässt, wobei $\boldsymbol{r}_\perp$ orthogonal und $\boldsymbol{r}_\parallel$ parallel zu $\boldsymbol{\beta}$ ist. Drücke $\boldsymbol{r}_\perp$ und $\boldsymbol{r}_\parallel$ jeweils durch $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{r}$ aus.

(b) Schreibe ct, $\boldsymbol{r}_\parallel$ und $\boldsymbol{r}_\perp$ als Funktion von ct', $\boldsymbol{r}'_\parallel$, $\boldsymbol{r}'_\perp$, $\boldsymbol{\beta}$ und $\gamma = \left(1 - \boldsymbol{\beta}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

(c) Gib die Boost-Matrix an.

(iii) Leite mit Hilfe von Teilaufgabe (ii) die allgemeine Formel zur Kombination von Geschwindigkeiten her, d.h. für zwei Geschwindigkeiten in beliebige Richtungen.