Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

WiSe 2025 / 2026 – Prof. Marc Wagner

Michael Eichberg: eichberg@itp.uni-frankfurt.de
Vilija de Jonge: dejonge@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 7

Abgabe am 05.12.2025, Besprechung in der Woche vom 08.12.2025.

Aufgabe 1 [*Polynome als Basisfunktionen*] (2+2+2=6 Pkt.)

Betrachte die Monome

$$x^0\,, \quad x^1\,, \quad x^2\,, \quad x^3$$

im Definitionsbereich $x \in [-1,+1]$, die eine Basis der Polynome vom Grad 3 bilden.

(i) Formuliere das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren für Funktionen und benutze es, um eine zu den obigen Monomen äquivalente Orthonormalbasis $g^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,3$, zu konstruieren.

(ii) Stelle die Funktionen

$$f^{(1)}(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3\,, \tag{1}$$

$$f^{(2)}(x) = \cos(\pi x) \tag{2}$$

optimal durch die Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,3$ dar, d.h. berechne die Koeffizienten $A_n^{(m)}$ der Darstellung

$$f^{(m)}(x) = \sum_n A_n^{(m)} g^{(n)}(x)\,, \tag{3}$$

$$A_n^{(m)} = (g^{(n)}, f^{(m)}) = \int_a^b \mathrm{d}x\, (g^{(n)}(x))^* f^{(m)}(x)\,. \tag{4}$$

Plotte Deine Ergebnisse und vergleiche beide $f^{(m)}(x)$ mit ihrer optimalen Darstellung durch die vier Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,3$.

(iii) Berechne die Taylor-Näherungen der beiden $f^{(m)}(x)$ um den Entwicklungspunkt $x = 0$ bis einschließlich 3. Ordnung. Vergleiche mit der Darstellung durch Basisfunktionen aus Teilaufgabe (ii) (fertige erneut Plots an) und diskutiere Deine Ergebnisse unter Betrachtung von globalen und lokalen Gesichtspunkten.

Aufgabe 2 [*Kugelflächenfunktionen und Randwertprobleme*] (2+3+5=10 Pkt.)

(i) Gib die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ für $l = 0, 1, 2$, $m = -l, \dots, +l$ sowohl in kartesischen wie auch in Kugelkoordinaten an. Skizziere diese neun Funktionen in geeigneter Weise.

(ii) Weise nach, dass die Kugelflächenfunktionen orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) = \int_{S^2} \mathrm{d}\Omega\, f^*(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) \tag{5}$$

sind. Gehe dabei folgendermaßen vor:

(a) Die von den zugeordneten Legendrepolynomen erfüllte Differentialgleichung kann geschrieben werden als

$$\mathrm{D_{op}} P_l^m = -l(l+1) P_l^m \tag{6}$$

mit

$$\mathrm{D_{op}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{m^2}{1-x^2}\,. \tag{7}$$

Nutze diese Identität, um

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = 0 \tag{8}$$

für $l \neq l'$ zu zeigen.

(b) Zeige nun noch, dass

$$(Y_{l,m}, Y_{l',m'}) = 0 \tag{9}$$

für $m \neq m'$ gilt und schließe mit Teilaufgabe (a) auf die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen.

(iii) Betrachte nun die beiden folgenden elektrostatischen Randwertprobleme in 3 Raumdimensionen:

(1) Das Volumen $\mathcal{V}$, das keine Ladungen enthält, ist eine im Ursprung zentrierte Kugel mit Radius R.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = \Phi_0(\vartheta, \varphi) = \alpha x(r = R, \vartheta, \varphi)$ ($\alpha = \text{const}$).

(2) Das Volumen $\mathcal{V}$, das keine Ladungen enthält, ist eine im Ursprung zentrierte Kugelschale, innerer Radius R_1, äußerer Radius R_2.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r = R_1, \vartheta, \varphi) = \Phi_1(\vartheta, \varphi) = \beta$ und $\Phi(r = R_2, \vartheta, \varphi) = \Phi_2(\vartheta, \varphi) = \gamma z^2(r = R_2, \vartheta, \varphi)$ ($\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$).

Berechne für beide Randwertprobleme das elektrostatische Potential innerhalb von $\mathcal{V}$.

Aufgabe 3 [*Multipolmomente und Multipolentwicklung*] `(2+2=4 Pkt.)`

(i) Betrachte vier Ladungen $q_1 = q_2 = +q$ und $q_3 = q_4 = -q$ mit Positionen $\boldsymbol{r}_1 = (-d/2, -d/2, 0)$, $\boldsymbol{r}_2 = (+d/2, +d/2, 0)$, $\boldsymbol{r}_3 = (+d/2, -d/2, 0)$ und $\boldsymbol{r}_4 = (-d/2, +d/2, 0)$.

   (a) Zeige, dass Gesamtladung und Dipolmoment verschwinden.

   (b) Berechne die Komponenten Q_{jk} des Quadrupolmomenttensors.

   (c) Einen Punktquadrupol erhält man, indem man den Grenzwert $d \to 0$ so bildet, dass Q_{jk} konstant bleibt. Wie muss man dabei q verändern, um einen solchen Punktquadrupol zu erhalten?

(ii) Betrachte einen Zylinder (Radius R, Länge L), dessen obere Hälfte homogen positiv geladen ist (Ladungsdichte $+\rho_0$) und dessen untere Hälfte negativ geladen ist (Ladungsdichte $-\rho_0$).

   (a) Berechne das Dipolmoment $\boldsymbol{p}$.

   (b) Eine Ladung q bewegt sich in großem Abstand $d \gg R, L$ vom Zylinder. Berechne die Kraft, die aufgrund des geladenen Zylinders auf die Ladung wirkt, in führender nicht-verschwindender Ordnung in $1/d$.