Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

WiSe 2025 / 2026 – Prof. Marc Wagner

Michael Eichberg: eichberg@itp.uni-frankfurt.de
Vilija de Jonge: dejonge@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 5

Abgabe am 21.11.2025, Besprechung in der Woche vom 24.11.2025.

Aufgabe 1 [*Energiefunktional*] (1+3=4 Pkt.)

(i) Wie lautet das Funktional der Feldenergie in Abhängigkeit vom elektrostatischen Potential Φ in einem ladungsfreien Volumen V?

(ii) Leite eine Differenzialgleichung für Φ in V her, indem Du forderst, dass die Energie stationär unter Variation von Φ ist. Am Rand R des Volumens V ist das Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$ vorgegeben. Die Variation soll die Randbedingungen respektieren.

Aufgabe 2 [*Methode der Bildladung*] (3+2+2=7 Pkt.)

Informiere Dich via Internet oder Bibliothek über die Methode der Bildladungen. Löse mit dieser Methode das folgende Randwertproblem: Eine Punktladung q befindet sich im Abstand d von einer unendlich ausgedehnten planaren Metallplatte mit elektrostatischem Potential $\Phi = 0$. Die Randbedingungen im Unendlichen lauten ebefalls $\Phi(r \to \infty) = 0$.

(i) Berechne $\Phi(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.

(ii) Berechne die auf der Metallplatte influenzierte Ladungsdichte und nachfolgend durch Integration die Gesamtladung.

(iii) Betrachte nun zusätzlich eine zweite ebenfalls unendlich ausgedehnte planare Metallplatte mit elektrostatischem Potential $\Phi = 0$, die im rechten Winkel zur ersten Platte steht und Abstand $\tilde{d}$ zur Punktladung q hat. Berechne $\Phi(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.

Aufgabe 3 [*Punktladung vor Metallkugel*] (3+2=5 Pkt.)

Außerhalb einer geerdeten, leitenden Metallkugel (Radius R, Zentrum $\boldsymbol{r} = 0$) befindet sich eine Punktladung q_1 bei $\boldsymbol{r}_1$.

(i) Berechne das Potential außerhalb der Kugel mithilfe einer geeigneten Bildladung q_2 bei $\boldsymbol{r}_2$.

(ii) Berechne die Ladungsdichte auf der Kugeloberfläche.

Aufgabe 4 [*Separationsansatz für Laplace-Gleichungen in kartesischen Koordinaten*] `(1+1+2=4 Pkt.)`

Betrachte die Laplace-Gleichung (d.h. die homogene Poisson-Gleichung)

$$\triangle \Phi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1}$$

in drei kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

(i) Vereinfache diese partielle DGl mit Hilfe eines Separationsansatzes zu drei gewöhnlichen DGln.

(ii) Löse diese gewöhnlichen DGln.

(iii) Gib die allgemeine Lösung an.