

THEORETISCHE PHYSIK 3 - KLASSISCHE ELEKTRODYNAMIK

WiSe 2025 / 2026 – PROF. MARC WAGNER

MICHAEL EICHBERG: eichberg@itp.uni-frankfurt.de

VILJA DE JONGE: dejonge@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 2

Abgabe am 31.10.2025, Besprechung in der Woche vom 03.11.2025.

Aufgabe 1 [Maßsysteme]

(1+1+1=3 Pkt.)

Beim Aufstellen des Coulomb-Gesetzes wurde in der Vorlesung die Konstante α eingeführt.

- (i) Zeigen Sie, dass falls α dimensionslos ist, d.h. $[\alpha] = 1$, die elektrische Ladung die Einheit

$$[q] = \text{g}^{1/2} \text{m}^{3/2} / \text{s} \quad (1)$$

haben muss.

- (ii) Angenommen α hat den Wert $\alpha = 10^{-7} c^2 \text{N/A}^2$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Weisen Sie nach, dass in diesem Fall $[q] = \text{As}$.
- (iii) Im Gauß-System hat die Elementarladung den Wert $e \approx 4,80 \cdot 10^{-10} \text{esu}$. Konvertieren Sie diese Größe in das SI-System und geben Sie damit e in Coulomb an (per Definition gilt $1 \text{C} = 1 \text{As}$).

Aufgabe 2 [Anordnungen von Ladungen]

(2+2+3=7 Pkt.)

Die vier Ladungen q_1, q_2, q_3 und q_4 befinden sich an den Positionen

$$\mathbf{r}_1 = (-a/2, a/2, 0), \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_2 = (a/2, a/2, 0), \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_3 = (a/2, -a/2, 0), \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_4 = (-a/2, -a/2, 0), \quad (5)$$

wobei a eine positive Konstante ist.

- (i) Illustrieren Sie die Ladungsverteilung und berechnen Sie das E-Feld bei $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ für den Fall, dass $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = e$.
- (ii) Die Ladung q_4 wird nun entfernt, berechnen Sie das E-Feld erneut an der gleichen Stelle für den Fall, dass die restlichen Ladungen die selbe Ladung wie im vorherigen Aufgabenteil haben.

Nun untersuchen wir noch folgenden Ladungsverteilung: man hat unendlich viele Ladungen q_i , $i \in \mathbb{N}_{>0}$, die sich an den Positionen

$$\mathbf{r}_i = (i \cdot a, 0, 0), \quad i \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (6)$$

befinden.

- (iii) Berechnen Sie das E-Feld bei $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ unter der Annahme dass $q_i = e \forall i \in \mathbb{N}_{>0}$. Welches Problem tritt auf, wenn Sie das Potential ϕ an der selben Stelle berechnen wollen?

Aufgabe 3 [$\mathbf{E} \perp \ddot{A}quipotentialfläche$] (4 Pkt.)

Es sei ein beliebiges Elektrostatisches Potential ϕ gegeben. Die Abbildung

$$\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (7)$$

mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, parametrisiere eine Fläche die

$$\phi(\mathbf{A}(u, v)) = \text{const.} \quad (8)$$

für alle $(u, v) \in \Omega$ erfüllt. Zeigen Sie, dass das zu ϕ gehörige E-Feld senkrecht auf der Fläche $\mathbf{A}$ steht, d.h. dass die Tangentialvektoren von $\mathbf{A}$ orthogonal zu $\mathbf{E}$ sind.

Aufgabe 4 [*Rechnen mit ∇*] (2+2+2=6 Pkt.)

Das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} ist folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9)$$

- (i) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = & \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} \\ & - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}, \end{aligned} \quad (10)$$

und folgern Sie unter beachtung der Einsteinschen Summenkonvention

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}. \quad (11)$$

- (ii) Zeigen Sie für ein Vektorfeld $\mathbf{A}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (12)$$

- (iii) Wie lautet der Gradient $\nabla\phi$ für ein skalares Feld ϕ in Kugelkoordinaten?