Theoretische Physik 3 - Klassische Elektrodynamik

Wintersemester 2020/2021 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 9

vom 15.01.21, Abgabe am 22.01.21, Besprechung in der Woche vom 25.01.21

Aufgabe 1 [*Verschiedenes zur Magnetostatik*] (2+2+3+1+3=11 Pkt.)

Betrachte zunächst einen unendlich langen, geraden, zylinderförmigen Draht (Radius R), durch den der Strom I fließt (die Stromdichte ist innerhalb des Drahtes räumlich konstant).

1. Berechne das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$ mit Hilfe des Amperschen Gesetzes. Überlege Dir dazu zunächst, welche Symmetrien die Struktur des magnetischen Feldes einschränken.

Das Vektorpotential eines magnetischen Punktdipols lautet

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}. \tag{1}$$

2. Berechne und skizziere das magnetische Feld des Punktdipols.
3. Berechne die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, die das magnetische Dipolfeld generiert und interpretiere das Ergebnis für $\vec{\mu} = (0, 0, \mu)$.
   Hinweis: Für die auftretende δ-Funktion bietet sich die Darstellung durch eine Gauß-Funktion an (siehe Blatt 3, Aufgabe 5).

Untersuche als nächstes eine im Ursprung zentrierte Kugel (Radius R), die homogen geladen ist (Gesamtladung q) und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ rotiert.

4. Bestimme die zugehörige Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$.
5. Durch die Rotation wird ein B-Feld erzeugt. Berechne ein zugehöriges Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ für $r > R$.
   Hinweis: Nutze die in der Vorlesung hergeleitete Integralformel für $\vec{A}(\vec{r})$. Beim Lösen des Integrals kann sich folgende Formel als hilfreich erweisen:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u \, \frac{u}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'ru}} = \frac{2r'}{3r^2} \quad (r > r'). \tag{2}$$

Aufgabe 2 [*Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

1. Zeige, dass d^4x Lorentz-invariant ist, d. h. $\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}^4x$ für zwei Intertialsysteme Σ und Σ' gilt.

Produced with the ExerciseHandler

2. Leite
$$(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \tag{3}$$
her, indem Du die definierende Eigenschaft von Lorentz-Transformationen $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}$ benutzt.

3. Zeige, dass $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ein kovarianter Vierervektor ist, d. h. für Lorentz-Transformationen Λ
$$\partial'_\mu = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\partial_\nu \tag{4}$$
gilt. (Ausgangspunkt Deines Beweises sollte $x'^\mu = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^\nu$ sein.)

Aufgabe 3 [*Boost in beliebiger Richtung*] `(3+3+3=9 Pkt.)`

1. Leite durch Hintereinanderausführung von zwei parallelen Boosts die in der Vorlesung bestimmte Formel zur relativistischen Kombination ("Addition") von Geschwindigkeiten her.

2. Ziel dieser Teilaufgabe ist es, die Matrix für einen Boost in beliebiger Richtung aufzustellen. Betrachte dazu das Bezugssystem Σ', welches sich mit der Geschwindigkeit $c\vec{\beta}$ relativ zum Bezugssystem Σ bewegt.
   (a) Betrachte den Vektor $\vec{r}$ im Bezugssystem Σ, der sich als als $\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$ darstellen lässt, wobei $\vec{r}_\perp$ orthogonal und $\vec{r}_\parallel$ parallel zu $\vec{\beta}$ ist. Drücke $\vec{r}_\perp$ und $\vec{r}_\parallel$ jeweils durch $\vec{\beta}$ und $\vec{r}$ aus.
   (b) Schreibe ct, $\vec{r}_\parallel$ und $\vec{r}_\perp$ als Funktion von ct', $\vec{r}'_\parallel$, $\vec{r}'_\perp$, $\vec{\beta}$ und $\gamma = (1-\vec{\beta}^2)^{-1/2}$.
   (c) Gib die Boost-Matrix an.

3. Leite mit Hilfe von 2. die allgemeine Formel zur Kombination von Geschwindigkeiten her, d. h. für zwei Geschwindigkeiten in beliebige Richtungen.

Produced with the ExerciseHandler