Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 6

vom 04.12.20, Abgabe am 11.12.20, Besprechung in der Woche vom 14.12.20

Aufgabe 1 [*Punktladung vor Metallkugel*] (3+2=5 Pkt.)

Außerhalb einer geerdeten, leitenden Metallkugel (Radius R, Zentrum $\mathbf{r} = 0$) befindet sich eine Punktladung q_1 bei $\mathbf{r}_1$.

1. Berechne das Potential außerhalb der Kugel mithilfe einer geeigneten Bildladung q_2 bei $\mathbf{r}_2$.

2. Berechne die Ladungsdichte auf der Kugeloberfläche.

Aufgabe 2 [*Separationsansatz für Laplace-Gleichungen in kartesischen Koordinaten*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

Betrachte die Laplace-Gleichung (d.h. die homogene Poisson-Gleichung)

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad 0$$

in drei kartesischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

1. Vereinfache diese partielle DGl mit Hilfe eines Separationsansatzes zu drei gewöhnlichen DGls.

2. Löse diese gewöhnlichen DGls.

3. Gib die allgemeine Lösung an.

Aufgabe 3 [*Penning-Falle*] (1+1+3=5 Pkt.)

Mit einer Penning-Falle können elektrisch geladene Teilchen mit Hilfe eines elektromagnetischen Feldes gefangen gehalten werden, d.h. sie bewegen sich aufgrund der auf sie wirkenden elektromagnetischen Kraft nur in einem begrenzten Raumbereich. Im Folgenden soll nur das elektrische Feld einer Penning-Falle betrachtet werden,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \alpha(x, y, -2z)$$

($\alpha = \text{const} > 0$).

1. Berechne die z-Komponente der Trajektorie eines elektrisch geladenen Teilchens (Ladung $q > 0$) in diesem elektrischen Feld und zeige damit, dass $z(t)$ beschränkt ist, dass das Teilchen also in z-Richtung eingesperrt ist. *Anmerkung: Um ein Einsperren in x- und y-Richtung zu gewährleisten, ist das hier nicht betrachtete magnetische Feld erforderlich.*

2. Bestimme das zu $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ gehörige elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$.

3. Das elektrische Feld einer Penning-Falle kann mit drei relativ zueinander isolierten gekrümmten Metallplatten realisiert werden, an denen die konstanten Potentiale Φ_1, Φ_2 und Φ_3 anliegen. Bestimme mathematische Ausdrücke, die die Form der Metallplatten beschreiben und fertige eine entsprechende Skizze an. Wie müssen die Potentiale Φ_1, Φ_2 und Φ_3 gewählt werden, damit das oben angegebene $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ erzeugt wird und die Falle in z-Richtung einen Mindestdurchmesser von d hat?

Aufgabe 4 [*Fourier-Reihe*] (3 Pkt.)

Berechne die Fourier-Reihe der im Intervall $0 \leq x \leq L$ definierten Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_0 = \text{const}, & \text{falls } L/4 \leq x \leq 3L/4, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

d. h. bestimme die Koeffizienten A_n in der Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{+2\pi i n x/L}.$$

Aufgabe 5 [*Kreisförmige Randwertprobleme*] (2+5=7 Pkt.)

In der Vorlesung wurde die allgemeine Lösung der 2-dimensionalen Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten hergeleitet,

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} + B_0 \frac{\ln(r/r_0)}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \neq 0} \left(A_n r^{|n|} + B_n \frac{1}{r^{|n|}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+in\varphi}.$$

Betrachte nun die beiden folgenden Randwertprobleme:

(RWP1) Das Volumen $\mathcal{V}$ ist der gesamte 2-dimensionale Raum bis auf einen im Ursprung zentrierten Kreis mit Radius R.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r = R, \varphi) = \Phi_0(\varphi) = \alpha \cos(2\varphi)$ und $\Phi(r \to \infty) = 0$.

(RWP2) Das Volumen $\mathcal{V}$ ist ein im Ursprung zentrierter Kreisring, innerer Radius R_1, äußerer Radius R_2.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r = R_1, \varphi) = \Phi_1(\varphi) = \beta + \gamma \cos(\varphi)$ und $\Phi(r = R_2, \varphi) = \Phi_2(\varphi) = \delta \sin(3\varphi)$.

Löse die folgenden Aufgaben für beide Randwertprobleme:

1. Müssen einige der unbekannten Koeffizienten A_n und B_n aus offensichtlichen Gründen verschwinden? Falls ja, welche?

2. Gib für alle verbleibenden Koeffizienten A_n und B_n Integralausdrücke an, sodass die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt werden, und berechne diese. Gib damit die Lösung $\Phi(r, \varphi)$ des Randwertproblems an.