Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 3

vom 13.11.20, Abgabe am 20.11.20, Besprechung in der Woche vom 23.11.20

Aufgabe 1 [*Maßsysteme*] (1+1+1=3 Pkt.)

Beim Aufstellen des Coulomb-Gesetzes wurde in der Vorlesung die Konstante α eingeführt.

1. Zeigen Sie, dass falls α dimensionslos ist, d.h. $[\alpha] = 1$, die elektrische Ladung die Einheit
$$[q] = \mathrm{g}^{1/2}\mathrm{m}^{3/2}/\mathrm{s} \tag{1}$$
haben muss.

2. Angenommen α hat den Wert $\alpha = 10^{-7}c^2\,\mathrm{N}/\mathrm{A}^2$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Weisen Sie nach, dass in diesem Fall $[q] = \mathrm{As}$.

3. Im Gauß-System hat die Elementarladung den Wert $e \approx 4{,}80 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{esu}$. Konvertieren Sie diese Größe in das SI-System und geben Sie damit e in Coulomb an (per Definition gilt $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}$).

Aufgabe 2 [*Anordnungen von Ladungen*] (2+2+3=7 Pkt.)

Die vier Ladungen q_1, q_2, q_3 und q_4 befinden sich an den Positionen

$$\vec{r}_1 = (-a/2, a/2, 0), \tag{2}$$
$$\vec{r}_2 = (a/2, a/2, 0), \tag{3}$$
$$\vec{r}_3 = (a/2, -a/2, 0), \tag{4}$$
$$\vec{r}_4 = (-a/2, -a/2, 0), \tag{5}$$

wobei a eine positive Konstante ist.

1. Illustrieren Sie die Ladungsverteilung und berechnen Sie das E-Feld bei $\vec{r} = (0, 0, z)$ für den Fall, dass $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$.

2. Die Ladung q_4 wird nun entfernt, berechnen Sie das E-Feld erneut an der gleichen Stelle für den Fall, dass die restlichen Ladungen die selbe Ladung wie im vorherigen Aufgabenteil haben.

Nun untersuchen wir noch folgende Ladungsverteilung: man hat unendlich viele Ladungen q_i, $i \in \mathbb{N}_{>0}$, die sich an den Positionen

$$\vec{r}_i = (i \cdot a, 0, 0), \quad i \in \mathbb{N}_{>0}, \tag{6}$$

befinden.

3. Berechnen Sie das E-Feld bei $\vec{r} = (0,0,0)$ unter der Annahme dass $q_i = e\,\forall i \in \mathbb{N}_{>0}$. Welches Problem tritt auf, wenn Sie das Potential ϕ an der selben Stelle berechnen wollen?

Aufgabe 3 [$\vec{E} \perp$ *Äquipotentialfläche*] (4 Pkt.)

Es sei ein beliebiges elektrostatisches Potential ϕ gegeben. Die Abbildung

$$\vec{A} : \Omega \to \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, parametrisiere eine Fläche die

$$\phi(\vec{A}(u,v)) = \text{const.} \tag{8}$$

für alle $(u,v) \in \Omega$ erfüllt. Zeigen Sie, dass das zu ϕ gehörige E-Feld senkrecht auf der Fläche $\vec{A}$ steht, d. h. dass die Tangentialvektoren von $\vec{A}$ orthogonal zu $\vec{E}$ sind.

Aufgabe 4 [*Rechnen mit* ∇] (2+2+2=6 Pkt.)

Das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} ist folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{9}$$

1. Zeigen Sie

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}, \tag{10}$$

und folgern Sie unter beachtung der Einsteinschen Summenkonvention

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}. \tag{11}$$

2. Zeigen Sie für ein Vektorfeld $\vec{A}$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \triangle \vec{A} \tag{12}$$

3. Wie lautet der Gradient $\nabla\phi$ für ein skalares Feld ϕ in Kugelkoordinaten?

Aufgabe 5 [δ-*Funkion*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

Zeige, dass für Funktionen, die glatt und beschränkt sind, die δ-Funktion dargestellt werden kann als

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{\frac{-x^2}{2\epsilon^2}}. \tag{13}$$

Das heißt, dass für eine glatte und beschränkte Funktion f

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{\frac{-x^2}{2\epsilon^2}} f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) \tag{14}$$

gezeigt werden muss.
Hinweis: Grenzwertbildung und Integration dürfen vertauscht werden für glatte Funktionen g_ϵ

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{15}$$

falls es eine Funktion h gibt mit

$$|g_\epsilon(x)| \leq h(x) \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } x \in \mathbb{R} \tag{16}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{17}$$