

Aufgabenblatt 2

vom 06.11.20, Abgabe am 13.11.20, Besprechung in der Woche vom 16.11.20

Aufgabe 1 [Schwingende Saite in 3 Raumdimensionen] (3+3+1=7 Pkt.)

Startpunkt dieser Aufgabe ist eine in x -Richtung gespannte Saite, die transversal in z -Richtung schwingt, genau wie in der Vorlesung diskutiert. Erweitere die in der Vorlesung angestellten Überlegungen von 2 auf 3 Raumdimensionen, d.h. die transversalen Schwingungen finden nun in der y - z -Ebene statt und werden durch $(y(x, t), z(x, t))$ beschrieben.

1. Stelle die Lagrange-Funktion und Lagrange-Dichte auf.
2. Bestimme mit Hilfe von Variationsrechnung die Feldgleichungen und eventuell auftretende zusätzliche Bedingungen.
3. Gib die allgemeine Lösung der Feldgleichungen an.

Aufgabe 2 [Klassische Stringtheorie] (4+2+4+3=13 Pkt.)

Betrachte eine Saite (auch bezeichnet als “String”), die sich aus N identischen Massenpunkten (Masse jeweils m , Positionen $\mathbf{X}_j(t)$) und N identischen Federn (Federkonstante k , Ruhelänge 0) zusammensetzt und sich beliebig in 3 Raumdimensionen bewegen kann. Die letzte Feder ist mit dem ersten Massenpunkt verbunden, d.h. die Saite ist geschlossen, es liegen also periodische Randbedingungen vor.

1. Führe auf sinnvolle Weise den Kontinuumsliches durch und gib die resultierende Lagrange-Dichte an (wähle zur Beschreibung des Strings $\mathbf{X}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, $0 \leq s < 1$ beziehungsweise $\mathbf{X}(s + 1, t) = \mathbf{X}(s, t)$).
Hinweis: Beachte, dass $\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{X}_N(t)$.
2. Bestimme mit Hilfe von Variationsrechnung die Feldgleichungen und eventuell auftretende zusätzliche Bedingungen.
3. Bestimme die Bewegung des Strings für Anfangsbedingungen $\mathbf{X}(s, 0) = \mathbf{f}(s)$, $\dot{\mathbf{X}}(s, 0) = \mathbf{g}(s)$.
4. Skizziere (z.B. mit Hilfe eines Computers) die zeitliche Entwicklung des Strings für $\mathbf{f}(s) = (2r \cos(2\pi s), r \sin(2\pi s), 0)$, $\mathbf{g}(s) = (0, 0, v)$, d.h. fertige Momentaufnahmen des Strings zu mindestens 10 verschiedenen Zeitpunkten an.

Randbemerkung: Solche geschlossenen “Gummibänder” sind in quantisierter, relativistischer Form die wesentlichen Bausteine der Stringtheorie, einer modernen Theorie, die möglicher Weise die vier fundamentalen Kräfte sowie sämtliche Elementarteilchen einheitlich und quantisiert beschreibt (siehe z.B. <https://de.wikipedia.org/wiki/Stringtheorie>).

Aufgabe 3 [Elektrostatistisches Potential und E-Feld einer Punktladung] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

Die Beziehung zwischen elektrostatischem Potential und E-Feld lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (1)$$

In der Vorlesung wurde bzw. wird das elektrostatische Potential und E-Feld einer Punktladung q_j bei \mathbf{r}_j als

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \quad (2)$$

angegeben. Zeige, dass (2) die Beziehung (1) erfüllt. Führe diesen Nachweis auf zwei unterschiedlichen Wegen aus:

1. durch Ableitung von Φ ;
2. durch geeignete Integration von \mathbf{E} .