Organisation der Übungen: **Jonas Scheunert** **Raum 02.104** **scheunert@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 3

vom 02.11.2018, Abgabe am 09.11.2018 in der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen in der Woche vom 12.11.2018 bis 16.11.2018

9) δ-Funkion *(4 Punkte)*

Zeige, dass für Funktionen, die glatt und beschränkt sind, die δ-Funktion dargestellt werden kann als

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{\frac{-x^2}{2\epsilon^2}} . \tag{1}$$

Das heißt, dass für eine glatte und beschränkte Funktion f

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{\frac{-x^2}{2\epsilon^2}} f(x) \, \mathrm{d}x = f(0) \tag{2}$$

gezeigt werden muss.
Hinweis: Grenzwertbildung und Integration dürfen vertauscht werden für glatte Funktionen g_ϵ

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon(x) \, \mathrm{d}x \, , \tag{3}$$

falls es eine Funktion h gibt mit

$$|g_\epsilon(x)| \leq h(x) \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{5}$$

10) Elektrostatisches Potential und E-Feld einer homogen geladenen Kugel *(4+2=6 Punkte)*

i. Berechne das elektrostatische Potential einer homogen geladenen Kugel (Zentrum im Ursprung, Radius R, Gesamtladung q) durch Lösen des in der Vorlesung diskutierten Integrals

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \tag{6}$$

Fertige eine Skizze des Ergebnis an.
Hinweis: Die Verwendung von Kugelkoordinaten ist zweckmäßig.

ii. Berechne, ausgehend von $\Phi(\mathbf{r})$ aus Teilaufgabe (a), das E-Feld der homogen geladenen Kugel. Illustriere auch hier wieder dein Ergebnis.

11) "Beweis" des Satzes von Stokes *(3 Punkte)*

Beweise analog zum "Beweis" des Satzes von Gauß aus der Vorlesung den Satz von Stokes für den Spezialfall, dass die Fläche in der x-y-Ebene liegt, d. h. eben ist.

12) Anwendung des Satzes von Gauß *(2+5=7 Punkte)*

i. Formuliere den Satz von Gauß in einer Dimension. Um welche dir seit der Schulzeit bekannte Beziehung handelt es sich?

ii. Berechne das Integral

$$\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \tag{7}$$

(V ist ein Torus mit Hauptradius R und Nebenradius r ($r < R$), dessen Symmetrieachse der z-Achse entspricht) auf zwei unterschiedlichen Wegen,

- durch Lösen des Volumenintegrals,
- durch Anwendung des Satzes von Gauß und Lösen des Oberflächeninegrals,

und verfiziere die Gültigkeit des Satzes von Gauß anhand dieses Beispiels.