

Blatt 12

vom 25.01.2018, Abgabe am 01.02.2018 in der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen in der Woche vom 04.02.2019 bis 08.02.2019

43) Elektrodynamik in d Raumdimensionen ($2+2+2=6$ Punkte)

Betrachte die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu$$

in $d \geq 1$ Raumdimensionen $\mathbf{r} = (x^1, x^2, \dots, x^d)$.

- Bestimme die Feldgleichungen in kovarianter Form, d. h. in Komponentenschreibweise mit Viererindizes.
- Verallgemeinere das elektrische Feld auf sinnvolle Art auf d Dimensionen. Wie viele Komponenten hat das elektrische Feld in d Dimensionen? Wie lauten die Feldgleichungen der Elektrostatik in d Raumdimensionen, die die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ mit dem Potential $A^0(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$ beziehungsweise den Komponenten des elektrischen Feldes in Verbindung bringen?
- Verallgemeinere das magnetische Feld auf sinnvolle Art auf d Dimensionen. Wie viele Komponenten hat das magnetische Feld in d Dimensionen? Wie lauten die Feldgleichungen der Magnetostatik in d Raumdimensionen, die die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ mit dem Potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ beziehungsweise den Komponenten des magnetischen Feldes in Verbindung bringen?

44) Fourier-Transformation ($3+3=6$ Punkte)

In der Vorlesung wurde die Fourier-Transformation diskutiert und dabei die Konvention

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{+ikx} \tilde{f}(k) \quad , \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x) \quad (\star)$$

verwendet.

- Berechne die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ einer normierten Gauß-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Diskutiere anhand geeigneter Skizzen, welchen Einfluss die Breite σ auf das Ergebnis $\tilde{f}(k)$ hat.

- Berechne die beiden Integrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{+ikx} e^{-ikx_0} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} \delta(x - x_0)$$

und zeige damit exemplarisch die Gültigkeit von (\star) , d.h. dass "Fourier-Hin-Transformation" und "Fourier-Rück-Transformation" invers zueinander sind.

Hinweis: Bei der Berechnung des ersten Integrals ist es zweckmäßig, den Integranden mit $e^{-\epsilon|k|}$ zu multiplizieren ($\epsilon > 0$ und klein) und am Ende der Rechnung den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ zu bilden.

45) Greensche Funktion des harmonischen Oszillators (3+2+3=8 Punkte)

Betrachte den ungedämpften harmonischen Oszillator in 1 Dimension, auf den die anregende Kraft $F(t)$ wirkt. Wie aus der Mechnik bekannt wird dieser durch die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\underbrace{\left(m \frac{d^2}{dt^2} + k\right)}_{D(t)} x(t) = F(t) \quad (\star)$$

beschrieben.

- i. Bestimme eine Greensche Funktion des Differentialoperators $D(t)$, d.h. löse

$$D(t)G(t, t') = \delta(t - t') \quad (\star\star).$$

Konstruiere $G(t, t')$ so, dass die Randbedingung $\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t, t') = 0$ erfüllt ist.

Hinweis: für $t < t'$ und für $t > t'$ ist es jeweils einfach, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $(\star\star)$ anzugeben. Eine mögliche Wahl ist $G(t, t') = 0$ für $t < t'$ und $G(t, t') = A \sin(\omega(t - t'))$ für $t > t'$. Begründe, dass diese Wahl geeignet ist, d.h. bei Anwendung von $D(t)$ eine δ -Funktion $\delta(t - t')$ entsteht. Setze diese beiden Lösungen dann so zusammen, dass die Differentialgleichung $(\star\star)$ auch für $t = t'$ erfüllt ist, d.h. bestimme A entsprechend (hierzu sind eventuell Deine Überlegungen aus Aufgabe 13 hilfreich).

- ii. Gib mit Hilfe von $G(t, t')$ einen Integralausdruck für die allgemeine Lösung von (\star) für beliebige anregende Kraft $F(t)$ an.
- iii. Betrachte nun einen harmonischen Oszillator, der für $t < 0$ in Ruhe ist. Im Zeitraum $0 \leq t \leq T$ wirkt die anregende Kraft $F(t) = F_0 = \text{const.}$ Für $t > T$ gibt es keine anregende Kraft. Bestimme mit Deinem Ergebnis aus ii. die Trajektorie $x(t)$ für beliebige Zeiten. Skizziere und diskutiere die Trajektorie für unterschiedliche T .