# Blatt 11

vom 18.01.2018, Abgabe am 25.01.2018 in der Vorlesung,
Besprechung in den Übungen in der Woche vom 28.01.2019 bis 01.02.2019

## 40) Feldstärketensor und dualer Feldstärketensor *(6+4=10 Punkte)*

i. Betrachte den Ausdruck

$$\mathcal{L} = \# F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$$

als Kandidat für die Lagrange-Dichte der Elektrodynamik. Dabei ist $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ der in der Vorlesung eingeführte duale Feldstärketensor.

(a) Zeige, dass $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ invariant unter Lorentz-Transformationen[1] ist, d.h. dass $\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.
*Hinweis: Überlege, wie Du die Determinante einer Lorentz-Transformation $\Lambda$ mit Hilfe von $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ in Komponentenschreibweise formulieren kannst.*

(b) Drücke $\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus. Drücke $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.
*Hinweis: Im Lauf der Rechnung ist es zweckmäßig, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ durch das dreikomponentige $\epsilon_{jkl}$ auszudrücken.*

(c) Ist $\mathcal{L}$ Lorentz-invariant? Ist $\mathcal{L}$ eichinvariant? Ist $\mathcal{L}$ paritätsinvariant? Warum eignet sich $\mathcal{L}$ nicht als Lagrange-Dichte oder Teil einer Lagrange-Dichte, die die Elektrodynamik beschreibt?

ii. Betrachte nun

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \#(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2$$

Ist $\mathcal{L}$ Lorentz-invariant, eichinvariant und paritätsinvariant? Wie lauten die Feldgleichungen? Welche mathematische Schwierigkeit, die in den Maxwell-Gleichungen nicht vorhanden ist, tritt auf, wenn man diese Feldgleichungen lösen will?

## 41) Homogene Maxwell-Gleichungen *(4 Punkte)*

Bestimme ausgehend von der kovarianten Form

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

die sogenannten homogenen Maxwell-Gleichungen ausgedrückt durch E-Felder und B-Felder.

## 42) Viererstromdichte *(4+2=6 Punkte)*

Zeige exemplarisch, dass sich $j^\mu(x) = (c\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t))$ unter Lorentz-Transformationen wie ein Vierervektor verhält, d. h. dass die Vergabe eines oberen griechischen Index $\mu$ an $j$ gerechtfertigt ist. Betrachte dazu

[1] Damit sind hier *eigentliche orthochrone* Lorentz-Transformationen gemeint, also solche, welche sich aus Boosts und Rotationen zusammensetzen. Die Transformationen $P = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, $T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ und $PT$ erfüllen auch $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$, gehören aber nicht zu der Zusammenhangskomponente der Lorentz-Gruppe, welche die Identität enthält. Sie beschreiben keine Transformationen zwischen zwei physikalisch realisierbaren Inertialsystemen.

i. eine im Inertialsystem $\Sigma$ ruhende homogen geladene Kugel (Ladungsdichte $\rho_0$),

ii. einen im Inertialsystem $\Sigma$ auf der $x$-Achse liegenden homogen geladenen Draht (Linienladungsdichte $\lambda_0$, verschwindender Strom).

Das Inertialsystem $\Sigma'$ bewegt sich relativ zu $\Sigma$ in $x$-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit $v$. Gib für die beiden genannten Fälle sowohl $j^\mu$ als auch $j'^\mu$ an (verwende für $j'^\mu$ Dein Wissen über Längenkontraktion) und zeige danach, dass $j^\mu$ und $j'^\mu$ über eine entsprechende Lorentz-Transformation verbunden sind.