Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik

Prof. Marc Wagner
ITP, Universität Frankfurt - WS 2016/2017

Organisation der Übungen: **Antje Peters** **Raum 2.107** **peters@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 8

vom 9.12.2016, Abgabe am 16.12.2016 in der Vorlesung

26) Penning-Falle (Fortsetzung) (schriftlich) *(2+1+3=6 Punkte)*

Ein Teilchen (Masse m, Ladung q) bewegt sich in einem homogenen und zeitlich konstanten magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0\mathbf{e}_z = \text{const}$.

i. Berechne die Trajektorie des Teilchens. Beschreibe die Form der Trajektorie in Worten sowie die Bedeutung jeder der sechs unsbestimmten Konstanten. Skizziere die Trajektorie.

Betrachte nun eine Penning-Falle, die dem bereits in Aufgabe i. untersuchten konstanten magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0\mathbf{e}_z = \text{const}$ und einem durch das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{\Phi_0}{2d^2}\left(z^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)$$

($\Phi_0 > 0$) festgelegten elektrischen Feld entspricht.

ii. Berechne aus $\Phi(\mathbf{r})$ das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und das zu $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ gehörige Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

iii. Berechne die Trajektorie eines Teilchens (Masse m, Ladung $q > 0$) für starke magnetische Felder, $\left(\frac{qB}{2mc}\right)^2 > \frac{q\Phi_0}{2md^2}$. Beschreibe die Form der Trajektorie in Worten sowie die Bedeutung jeder der sechs unsbestimmten Konstanten. Skizziere die Trajektorie. Begründe, dass es sich bei der diskutierten elektromagnetischen Feldkonfiguration tatsächlich um eine Falle handelt, d.h. positiv geladene Teilchen in einem begrenzten Raumbereich eingesperrt werden.
Hinweis: Die zugehörigen Newtonschen Bewegungsgleichungen für die x- und die y-Komponente bilden ein System zweier linearer gekoppelter Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, zu dessen Lösung sich ein Exponentialansatz $(x(t), y(t)) = \mathbf{v}e^{i\omega t}$ anbietet[1].

---

[1] Zwischenergebnis: Man findet $\omega_{1/2} = \pm\left(\frac{1}{2}\frac{qB_0}{mc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{qB_0}{mc}\right)^2 - \frac{q\Phi_0}{2md^2}}\right)$.

27) Strom durch kreisförmigen Draht (schriftlich) *(3+3+3=9 Punkte)*

Durch einen infinitesimal dünnen in der x-y-Ebene liegenden kreisförmig gebogenen Draht (Zentrum des Kreises im Ursprung, Kreisradius R) fließt der Strom I.

i. Bestimme die zugehörige Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ sowohl in kartesischen als auch in Zylinderkoordinaten. Teste jeweils Dein Ergebnis, indem Du eine Fläche definierst, die den kreisförmigen Draht an einer Stelle schneidet, und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ über diese Fläche integrierst.

ii. Berechne das durch den Kreisstrom erzeugte magnetische Feld auf der z-Achse, d.h. $\mathbf{B}(x = 0, y = 0, z)$. Führe die Rechnung auf zwei verschiedenen Wegen aus, zunächst ausgehend von einer geeigneten Parametrisierung des Drahtes $\mathbf{s}(\lambda)$ und

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{I}{c} d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3},$$

dann ausgehend von Deiner in i. angegebenen Stromdichte und

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{1}{c} \int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

iii. Berechne das durch den Kreisstrom erzeugte magnetische Feld in der x-y-Ebene, d.h. $\mathbf{B}(x, y, z = 0)$. Überlege zunächst, welche Symmetrien die Parameterabhängigkeit und Richtung von $\mathbf{B}(x, y, z = 0)$ einschränken. Stelle dann einen Integralausdruck für $\mathbf{B}(x, y, z = 0)$ auf. *Dieses Integral ist analytisch nicht offensichtlich zu lösen, weshalb sich die numerische Lösung mit Hilfe eines Computers anbietet. Auf dem Python-Ergänzungsblatt Nr. 8 wird die Vorgehensweise erklärt.*

28) Vektorpotentiale, Eichsymmetrie und Eichtransformationen (mündlich) *(2+1+2=5 Punkte)*

i. Zeige, dass die folgenden beiden Vektorpotentiale eichäquivalent sind, d.h. dem gleichen magnetischen Feld entsprechen. Gib eine Eichtransformation an, die die beiden Vektorpotentiale ineinander überführt.

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) \quad = \quad \frac{\alpha \mathbf{r}}{\mathbf{r}^2 + \lambda^2} \quad , \quad \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}) \quad = \quad 0.$$

ii. Welches der beiden folgenden Felder ist kein zulässiges magnetisches Feld? Begründe Deine Antwort mit einer kurzen Rechnung.

$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}) \quad = \quad \alpha f(x^2 + y^2 + z^2) \begin{pmatrix} +x \\ +y \\ +z \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}) \quad = \quad \beta f(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} -y \\ +x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

iii. Finde eine Eichtransformation, die das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha(\sin(x/R) + \cos(y/R)) \\ 0 \\ \beta z^2 \end{pmatrix}$$

in Coulomb-Eichung bringt und gib das eichtransformierte Vektorpotential an. Teste Deine Rechnung, indem Du in beiden Fällen das magnetische Feld berechnest.

Python-Übung 8 – Numerische Integration

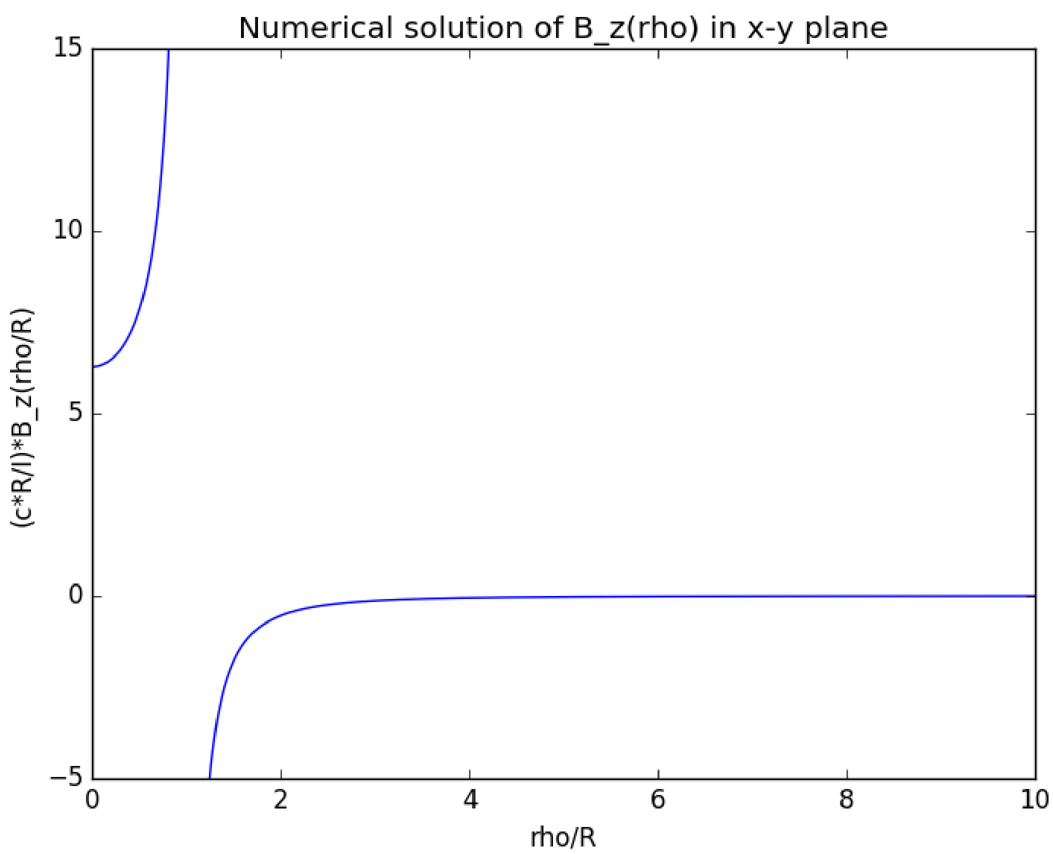
In Aufgabe 27 wurde ein Integralausdruck für das B-Feld einer infinitesimal dünnen Leiterschleife in der x-y-Ebene aufgestellt. Der angegebene Code berechnet die Lösung des Integrals numerisch und erzeugt einen Plot der Lösung in Abhängigkeit von `rho/R`. Starte den Code auf Ihrem Computer und reproduziere den Plot.

1. Mache dir den Grund dafür klar, dass der Code die Größe `(c*R/I)*B_z` in Abhängigkeit von `rho/R` berechnet. Überlege dazu, welche Nachteile eine Berechnung des B-Feldes in SI-Einheiten hätte.

2. Beschreibe und deute den Plot, den der Code erzeugt.

3. Die Schrittweite `dphi` ist ein Maß für die Exaktheit der numerischen Lösung. Plotte das B-Feld für verschiedene Schrittweiten `dphi=2*pi/1000.0, 2*pi/100.0, 2*pi/10.0` in dieselbe Figur. Beschreibe und erkläre Unterschiede und Gemeinsamkeiten der erzeugten Graphen.

Hinweis: Um Python-Codes unabhängig vom Betriebssystem auszuführen, kann man die Website `http://sagecell.sagemath.org/` *nutzen. Python-Code kann dort hineinkopiert und dann direkt im Browser ausgeführt werden.*



Code:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import pi, sqrt, cos


rho_o_R=np.arange(0.0, 10.0, 0.01)
dphi = 2*pi/1000.0
phi=np.arange(0, 2.0*pi,dphi)


# B field in x-y plane, z component
def Bfield(rR):
   integral = 0.0
   for p in phi:
      integral = integral + (1-rR*cos(p))/
                (sqrt(1+rR**2.0-2.0*rR* cos(p))**3.0)*(dphi)
   return integral


# plotting
fig = plt.figure(1)
plt.plot(rho_o_R, Bfield(rho_o_R))
plt.title('Numerical solution of B_z(rho) in x-y plane')
plt.xlabel('rho/R')
plt.ylabel('(c*R/I)*B_z(rho/R)')
plt.ylim(-5.0,15.0)
plt.show()
```