Organisation der Übungen: **Antje Peters** **Raum 2.107** **peters@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 7

vom 2.12.2016, Abgabe am 9.12.2016 in der Vorlesung

23) Polynome als Basisfunktionen (mündlich) *(2+2+2=6 Punkte)*

Betrachte die Monome

$$x^0 \quad , \quad x^1 \quad , \quad x^2 \quad , \quad x^3$$

im Definitionsbereich $x \in [-1, +1]$, die eine Basis der Polynome vom Grad 3 bilden.

i. Formuliere das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren für Funktionen und benutze es, um eine zu obigen Monomen äquivalente Orthonormalbasis $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$, zu konstruieren.

ii. Stelle die Funktionen

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 \\ f^{(2)}(x) &= \cos(\pi x) \end{aligned}$$

optimal durch die Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$ dar, d.h. berechne die Koeffizienten $A_n^{(m)}$ der Darstellung

$$f^{(m)}(x) = \sum_n A_n^{(m)} g^{(n)}(x) \quad , \quad A_n^{(m)} = (g^{(n)}, f^{(m)}) = \int_a^b dx\, (g^{(n)}(x))^* f^{(m)}(x).$$

Begründe, warum die Darstellung optimal ist, bzw. in welcher Hinsicht sie optimal ist. Plotte Deine Ergebnisse und vergleiche beide $f^{(m)}(x)$ mit ihrer optimalen Darstellung durch die vier Basisfunktionen $g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

iii. Berechne die Taylor-Näherungen der beiden $f^{(m)}(x)$ um den Entwicklungspunkt $x = 0$ bis einschließlich 3. Ordnung. Vergleiche mit der Darstellung durch Basisfunktionen aus ii. (fertige erneut Plots an) und diskutiere Deine Ergebnisse. Warum gibt es keine Unterschiede bei $f^{(1)}(x)$ aber deutliche Unterschiede bei $f^{(2)}(x)$?

24) Kugelflächenfunktionen und Randwertproblem (schriftlich) *(2+1+5=8 Punkte)*

i. Gib die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ für $l = 0, 1, 2$, $m = -l, \dots, +l$ sowohl in kartesischen wie auch in Kugelkoordinaten an. Skizziere diese neun Funktionen in geeigneter Weise.

ii. Überzeuge Dich exemplarisch von der Orthogonalität der $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$, indem Du folgende Skalarprodukte berechnest:

$$\begin{aligned}&(Y_{l,m}, Y_{l',m'}) \quad (\text{für } m \neq m')\\ &(Y_{1,0}, Y_{0,0})\\ &(Y_{2,+1}, Y_{1,+1}).\end{aligned}$$

iii. Betrachte nun die beiden folgenden elektrostatischen Randwertprobleme in 3 Raumdimensionen:

(RWP1) Das Volumen $\mathcal{V}$, das keine Ladungen enthält, ist eine im Ursprung zentrierte Kugel mit Radius R.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r = R, \vartheta, \varphi) = \Phi_0(\vartheta, \varphi) = \alpha x(r = R, \vartheta, \varphi)$ ($\alpha = \text{const}$).

(RWP2) Das Volumen $\mathcal{V}$, das keine Ladungen enthält, ist eine im Ursprung zentrierte Kugelschale, innerer Radius R_1, äußerer Radius R_2.
Dirichlet-Randbedingungen $\Phi(r = R_1, \vartheta, \varphi) = \Phi_1(\vartheta, \varphi) = \beta$ und $\Phi(r = R_2, \vartheta, \varphi) = \Phi_2(\vartheta, \varphi) = \gamma z^2(r = R_2, \vartheta, \varphi)$ ($\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$).

Berechne für beide Randwertprobleme das elektrostatische Potential innerhalb von $\mathcal{V}$.

25) Multipolmomente und Multipolentwicklung (schriftlich) *(2+2+2=6 Punkte)*

i. Drücke Dipolmoment $\mathbf{p}$ und Quadrupolmoment Q_{jk} durch die sphärischen Multipolmomente q_{1m} und q_{2m} aus.

ii. Betrachte vier Ladungen $q_1 = q_2 = +q$ und $q_3 = q_4 = -q$ mit Positionen $\mathbf{r}_1 = (-d/2, -d/2, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (+d/2, +d/2, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (+d/2, -d/2, 0)$ und $\mathbf{r}_4 = (-d/2, +d/2, 0)$.

- Zeige, dass Gesamtladung und Dipolmoment verschwinden.
- Berechne das Quadrupolmoment Q_{jk}.
- Einen Punktquadrupol erhält man, indem man den Grenzwert $d \to 0$ so bildet, dass Q_{jk} konstant bleibt. Wie muss man dabei q verändern, um einen solchen Punktquadrupol zu erhalten.

iii. Betrachte einen Zylinder (Radius R, Länge L), dessen obere Hälfte homogen positiv geladen ist (Ladungsdichte $+\rho_0$) und dessen untere Hälfte negativ geladen ist (Ladungsdichte $-\rho_0$).

- Berechne das Dipolmoment $\mathbf{p}$.
- Eine Ladung q bewegt sich in großem Abstand $d \gg R, L$ vom Zylinder. Berechne die Kraft, die aufgrund des geladenen Zylinders auf die Ladung wirkt, in führender nicht-verschwindender Ordnung in $1/d$.