Organisation der Übungen: Antje Peters Raum 2.107 peters@th.physik.uni-frankfurt.de

Blatt 5

vom 18.11.2016, Abgabe am 25.11.2016 in der Vorlesung

15) Kugelkondensator (schriftlich) *(3+2=5 Punkte)*

Betrachte einen Kugelkondensator, der aus zwei konzentrischen Kugelschalen aus Metall, Radien R_1 und $R_2 > R_1$, besteht. Das elektrostatische Potential auf den Metallkugeln ist $\Phi_1 = \text{const}$ bzw. $\Phi_2 = \text{const}$.

i. Löse das Randwertproblem zwischen den beiden Kugeln, d.h. für $R_1 < r < R_2$. Gib sowohl Φ als auch $\mathbf{E}$ an.

ii. Berechne die auf den Metalloberflächen influenzierte Ladungsdichten und Ladungen sowie die Kapazität des Kugelkondensators.

Unter `http://www.falstad.com/emstatic/index.html` findet sich eine Java-Anwendung zur Visualisierung von physikalischen Kozepten. U.a. kann man sich die Felder und Potentiale aus dieser Aufgabe anzeigen lassen.

16) Methode der Bildladungen (schriftlich) *(3+2+2=7 Punkte)*

Informiere Dich via Internet oder Bibliothek über die Methode der Bildladungen. Löse mit dieser Methode das folgende Randwertproblem: Eine Punktladung q befindet sich im Abstand d von einer unendlich ausgedehnten planaren Metallplatte mit elektrostatischem Potential $\Phi = 0$. Die Randbedingungen im Unendlichen lauten ebefalls $\Phi(r \to \infty) = 0$.

i. Berechne $\Phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

ii. Berechne die auf der Metallplatte influenzierte Ladungsdichte und nachfolgend durch Integration die Gesamtladung.

Betrachte nun zusätzlich eine zweite ebenfalls unendlich ausgedehnten planare Metallplatte mit elektrostatischem Potential $\Phi = 0$, die im rechten Winkel zur ersten Platte steht und Abstand $\tilde{d}$ zur Punktladung q hat.

iii. Berechne $\Phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

17) Gravitation in mehr als 3 Raumdimensionen (mündlich) *(2+2=4 Punkte)*

Analog zum elektrischen Feld, das mit der Kraft auf eine Probeladung q gemäß $\mathbf{F}_{\text{Coulomb}}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in Beziehung steht, kann man ein Gravitationsfeld $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ durch $\mathbf{F}_{\text{Gravitation}}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}(\mathbf{r})$ definieren, also über die Kraft auf eine Probemasse m. Da die elektrostatische Kraft und die Gravitationskraft das gleiche Abstandsverhalten haben, gilt auch für $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ die Poissongleichung beziehungsweise das Gaußsche Gesetz, z.B.

$$\nabla\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) \tag{1}$$

(G: Gravitationskonstante; ρ: Massendichte).

i. Betrachte nun ein Universum mit d Raumdimensionen. Berechne die Abstandsabhängigkeit der Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten und des zugehörigen Potentials für beliebige $d \geq 1$. Welche Einheit hat die Gravitationskonstante G?

ii. In modernen spekulativen Theorien, z.B. der Stringtheorie, vermutet man neben den 3 „sichtbaren" unendlich ausgedehnten Raumdimensionen (Koordinaten x_1, x_2, x_3) $d - 3$ weitere Dimensionen, die periodisch sind, d.h. $x_j \equiv x_j + L$ für $4 \leq j \leq d$, mit sehr kleiner Ausdehnung L, z.B. $L \ll 1\,\text{mm}$. Diskutiere (ohne Rechnung) die Abstandsabhängigkeit des Gravitationsgesetzes in einem solchen Universum für Abstände $r \ll L$ und $r \gg L$ und fertige eine Skizze des Gravitationsgesetzes an.

18) Separationsansatz für Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten (mündlich) *(1+1+2=4 Punkte)*

Betrachte die Laplace-Gleichung (d.h. die homogene Poisson-Gleichung)

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) \quad = \quad 0$$

in drei kartesischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

i. Vereinfache diese partielle DGl mit Hilfe eines Separationsansatzes zu drei gewöhnlichen DGls.

ii. Löse diese gewöhnlichen DGls.

iii. Gib die allgemeine Lösung an.