Organisation der Übungen: Antje Peters Raum 2.107 peters@th.physik.uni-frankfurt.de

Blatt 2

vom 28.10.2016, Abgabe am 4.11.2016 in der Vorlesung

5) Trommel (schriftlich) *(2+2+2+3+2=11 Punkte)*

Startpunkt dieser Aufgabe ist eine in x-Richtung gespannte Saite, die transversal in z-Richtung schwingt, genau wie in der Vorlesung diskutiert.

Erweitere die in der Vorlesung angestellten Überlegungen von 2 auf 3 Raumdimensionen, indem Du nicht eine 1-dimensionale Kette von Massenpunkten und Federn (Saite) sondern ein 2-dimensionales Netz von Massenpunkten und Federn (Membran) betrachtest. Die Membran soll in der x-y-Ebene gespannt sein und in z-Richtung transversal schwingen.

i. Führe auf sinnvolle Weise den Kontinuumslimes durch und gib die resultierende Lagrange-Dichte an (wähle zur Beschreibung der Membran $z(x, y, t)$).

ii. Bestimme mit Hilfe von Variationsrechnung die Feldgleichung und eventuell auftretende zusätzliche Bedingungen.

iii. Für welche Parameter ω, k_x, k_y liefert der Ansatz $z(x, y, t) = e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$ spezielle Lösungen der Feldgleichung? Wie lautet die allgemeinste reelle Lösung die man aus diesen speziellen Lösungen zusammensetzen kann?

iv. Um eine Trommel zu konstruieren, wird die Membran nun in einen quadratischen Rahmen gespannt, d.h. es sollen die Dirichlet-Randbedingungen $z(0, y, t) = z(L, y, t) = z(x, 0, t) = z(x, L, t) = 0$ gelten. Damit wird die allgemeine Lösung aus (iii) eingeschränkt. Gib diese eingeschränkte Lösung an.

v. Die Lösung aus (iv) ist eine unendliche Summe von "Elementarwellen". Wähle eine dieser Elementarwellen aus und skizziere (z.B. mit Hilfe eines Computers) ihre Bewegung für verschiedene Zeitpunkte. Wodurch wird die Bewegung charakterisiert?

6) Gradient und Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten (mündlich) *(2+2+2+2+1=9 Punkte)*

In Feldtheorien, z.B. in der Elektrodynamik, spielen der Nabla-Operator $\nabla = (\partial x\,, \partial y\,, \partial z)$ und der Laplace-Operator $\triangle = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$ eine wichtige Rolle ($\partial_x = \partial/\partial x$, usw.). Häufig vereinfachen sich Gleichungen, in denen diese Operatoren auftreten, wenn man Zylinder- oder Kugelkoordinaten verwendet. Die folgenden Teilaufgaben dienen also als mathematische Vorbereitung von Vorlesung und Übungen.

i. Wie lautet der Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten?

ii. Wie lautet der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten?

iii. Wie lautet der Nabla-Operator in Kugelkoordinaten?

iv. Wie lautet der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten?

v. Eine Funktion Φ hängt nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ab, d.h. $\Phi = \Phi(r)$. Vereinfache $\triangle\Phi$ so weit wie möglich.