

# **Theoretische Physik 2**

## **Klassische Mechanik**

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Sommersemester 2022

Version: 15. Juli 2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie (relativistische Mechanik)</b>	<b>4</b>
1.1	Konstanz der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	4
1.2	Grundidee der speziellen Relativitätstheorie, Lorentz-Transformationen . . . . .	5
1.3	Obere und untere Indizes . . . . .	10
1.4	Relativistische Addition von Geschwindigkeiten . . . . .	11
1.5	Zeitdilatation . . . . .	13
1.6	Längenkontraktion . . . . .	17
1.7	Eigenzeit, Zwillingsparadoxon . . . . .	18
1.8	Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls . . . . .	21
1.9	Relativistische BGl . . . . .	23
1.10	Viererimpulserhaltung, relativistische Streuprozesse und Zerfälle . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Lagrange-Formalismus</b>	<b>26</b>
2.1	Prinzip der kleinsten Wirkung . . . . .	26
2.2	Variationsrechnung, Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .	28
2.3	Generalisierte Koordinaten . . . . .	29
2.4	Euler-Lagrange-Gleichungen für generalisierte Koordinaten . . . . .	31
2.5	Zusammenfassung und Beispiele . . . . .	34
2.5.1	Massenpunkt auf rotierender Stange . . . . .	34
2.5.2	Ebenes Doppelpendel im homogenen Gravitationsfeld . . . . .	34
2.6	Bewegung in gekrümmten Räumen oder beschrieben durch krummlinige Koordinaten . . . . .	35
2.6.1	Parallelen zur Metrik und oberen und unteren Indizes in SRT . . . . .	39
2.6.2	Kräftefreie Bewegung . . . . .	40
2.6.3	Geodätengleichung, ein weiteres Variationsproblem . . . . .	42
2.6.4	Abschließendes Beispiel: Bewegung auf Kegelfläche im homogenen Schwerfeld der Erde . . . . .	44
2.7	Erhaltungsgrößen, Symmetrien, Noether-Theorem . . . . .	45
2.7.1	Zyklische Variablen und Erhaltungsgrößen . . . . .	45
2.7.2	Noether-Theorem . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Hamilton-Formalismus</b>	<b>50</b>
3.1	Legendre-Transformation . . . . .	50

3.2	Hamiltonsche BGs . . . . .	52
3.3	Poisson-Klammern . . . . .	53
3.4	Phasenraum . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Kleine Schwingungen von Vielteilchensystemen</b>	<b>57</b>
4.1	Quadratische Näherung der Lagrange-Funktion . . . . .	57
4.2	BGs und deren Lösung . . . . .	60
4.3	Normalschwingungen und Normalkoordinaten . . . . .	64
4.4	Ausbreitung von Wellen im Kristall . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Grundlagen der Kontinuumsmechanik und von Feldtheorien</b>	<b>70</b>
5.1	Schwingende Saite . . . . .	70
5.2	Ausblick: Mehrdimensionale Erweiterungen, Bedeutung der Wellengleichung in der Elementarteilchenphysik . . . . .	75

# 1 Spezielle Relativitätstheorie (relativistische Mechanik)

## 1.1 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

- Wiederholung, “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (nicht-relativistische Mechanik):

– Inertialsysteme:

- \* Koordinatensysteme, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen bzw. sich relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.
- \* In ihnen gilt das 1. Newtonsche Axiom (Trägheitsprinzip):  
*Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.*

– Koordinatentransformation zwischen zwei Inertialsystemen: **Galilei-Transformation.**

- \* Siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (WiSe 2021/22), Aufgabenblatt 4, Aufgabe 1.

- \* Betrachte zwei parallel ausgerichtete Inertialsysteme,

- $\Sigma$ , Raumzeitkoordinaten  $(t, \mathbf{x})$ ,
- $\Sigma'$ , Raumzeitkoordinaten  $(t', \mathbf{x}')$ ,

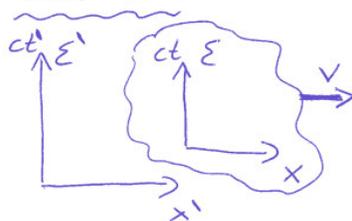
die sich relativ zueinander in  $x$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $v = \text{const}$  bewegen:

$$t' = t + t_0 \quad , \quad x' = x + vt + x_0 \quad , \quad y' = y + y_0 \quad , \quad z' = z + z_0. \quad (1)$$

- \* Galilei-Transformation von  $\Sigma$  nach  $\Sigma'$ :

- $t_0$ : Konstante Zeitdifferenz (**Translation in Zeit**), häufig und auch im Folgenden stets  $t_0 = 0$  (d.h.  $t' = t$ ).
- $(x_0, y_0, z_0)$ : Konstante räumliche Verschiebung (**Translation im Raum**), häufig und auch im Folgenden stets  $(x_0, y_0, z_0) = 0$  (d.h.  $x' = x + vt$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ ).

Bild - 001



$\Sigma$  bewegt sich  
mit Geschwindigkeit  
 $v$  in  $\Sigma'$

- Lichtsignal (z.B. ein Photon) zum Zeitpunkt  $t = 0$  von einem in  $\Sigma$  bei  $x = 0$  ruhenden Experimentator in positive  $x$ -Richtung ausgesendet:  $x_{\text{LS}}(t) = ct$ <sup>1</sup> ( $c$ : Geschwindigkeit des Lichts in  $\Sigma$ ).
- Beobachter in  $\Sigma'$ :  $x'_{\text{LS}}(t) = x_{\text{LS}}(t) + vt = (c + v)t = c't$  ( $c' = c + v$ : Geschwindigkeit des Lichts in  $\Sigma'$ ).
- In nicht-relativistischer Mechanik ist Lichtgeschwindigkeit also nicht universell, außerdem beliebig hohe Geschwindigkeiten möglich, also auch "Überlichtgeschwindigkeit".
- Aussage steht im Widerspruch zu Experimenten, z.B. Michelson-Moreley-Experiment (1881, 1887):
  - Ziel: Messung des Ätherwinds.
  - Überraschendes Ergebnis: Konstanz/Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem, d.h.  $c = c' \approx 3 \times 10^8$  m/s = const.

## 1.2 Grundidee der speziellen Relativitätstheorie, Lorentz-Transformationen

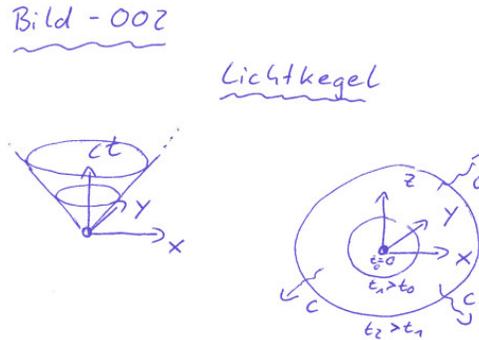
- **Spezielle Relativitätstheorie** (SRT), Einstein (1905).
- Modifiziere Galilei-Transformation (1) so, dass  $c = \text{const}$ , d.h. sich die Lichtgeschwindigkeit bei Übergang in andere Inertialsysteme nicht verändert.
  - Transformation von  $\Sigma$  nach  $\Sigma'$  soll weiterhin linear sein,
 
$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}. \quad (2)$$
    - \*  $\Lambda$ : Matrix, hängt von Parametern der Transformation ab, in 1 Raumdimension z.B. nur von  $v$ , nicht aber von  $t$  oder  $\mathbf{x}$ .
    - \* Notation:  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x})$  (Raumzeitvektor; Verwendung griechischer Indizes ist Konvention; ein Satz von 4 Größen, der sich gemäß (2) transformiert, z.B.  $x^\mu$ , wird als **Vierervektor** bezeichnet).
    - \* Üblich ist Komponentenschreibweise, d.h. äquivalent zu (2) ist
 
$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3)$$
 (Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert; Bedeutung von oberen und unteren Indizes später).
    - \*  $x^\mu = 0$  entspricht  $x'^\mu = 0$  bzw.  $0 = 0'$ , d.h. keine Translation in Zeit oder im Raum.
  - Transformation (2) bzw. (3) soll für Geschwindigkeiten  $\ll c$  in (1) übergehen (nicht-relativistische Mechanik ist exzellente Beschreibung der Natur für Geschwindigkeiten  $\ll c$ ).
  - $t \neq t'$ , d.h. Zeit vergeht unterschiedlich schnell in unterschiedlichen Inertialsystemen (sonst lassen sich obige Forderungen nicht erfüllen).

---

<sup>1</sup>Hier und auch häufig im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit nur 1 Raumdimension.

$\Lambda$ , d.h. Transformationen zwischen Inertialsystemen in SRT, werden als **Lorentz-Transformationen** bezeichnet, die eingeführten griechischen Indizes als **Lorentz-Indizes**, **Vierindizes** oder **Raumzeitindizes**.

- $c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = 0$  beschreibt **Lichtkegel** bei  $x^\mu = 0$ , d.h. Raumzeitpunkte  $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ , die von einem zum Zeitpunkt  $t = 0$  bei  $\mathbf{x} = 0$  ausgesandten Lichtsignal (ein Kugelblitz) "beleuchtet" werden.



- Es muss gelten

$$c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = c^2t'^2 - \mathbf{x}'^2 = 0, \quad (4)$$

d.h. aufgrund von  $c = \text{const}$  hat ein Lichtkegel in jedem Inertialsystem die gleiche Form.

- **Raumzeitabstand** zwischen **Ereignissen**  $x_A^\mu$  und  $x_B^\mu$ :

$$\Delta x_{BA}^2 = (ct_B - ct_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2. \quad (5)$$

- Starke Ähnlichkeit zu Euklidischem Abstand  $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$ ; Raumzeitabstände können jedoch auch negativ sein.
- Lichtkegel bei  $x_A^\mu$ : Menge aller Raumzeitpunkte  $x_B^\mu$  mit Abstand  $\Delta x_{BA}^2 = 0$  zu  $x_A^\mu$ .
- Experimenteller Befund: Nicht nur Lichtgeschwindigkeit/Lichtkegel, sondern auch beliebige Raumzeitabstände unverändert bei Wechsel des Inertialsystems.
- Ersetze daher (4) durch stärkere Bedingung an  $\Lambda$ :

$$c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = c^2t'^2 - \mathbf{x}'^2 \quad (6)$$

(aus Gründen der Übersichtlichkeit hier nicht Raumzeitabstände zwischen  $x_A^\mu$  und  $x_B^\mu$  sondern zwischen  $x^\mu$  und 0 betrachtet [zulässig, da  $0 = 0'$ ]).

\*\*\*\*\* 19. April 2022 (2. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Mit der **Minkowski Metrik** (auch **Metrik**, **metrischer Tensor**)

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

lassen sich Raumzeitabstände auch einfach in Komponenten schreiben,

$$c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu. \quad (8)$$

- Bedingung (6) wird damit zu

$$x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x'^\rho \eta_{\rho\sigma} x'^\sigma = \Lambda^\rho{}_\mu x^\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu x^\nu \quad (9)$$

bzw.

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \quad (10)$$

bzw.

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (11)$$

- Starke Ähnlichkeit zu Rotationsmatrizen  $\mathcal{R}$ ; Euklidische Abstände, z.B.  $\mathbf{x}^2$ , werden durch sie nicht verändert; erfüllen  $\mathbb{1} = \mathcal{R}^T \mathbb{1} \mathcal{R}$  (siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2021/22], Abschnitt 10.2).

- Wie viele Parameter hat  $\Lambda$ ?

–  $\Lambda$  ist reelle  $4 \times 4$ -Matrix, hat also 16 Einträge.

– (10) bzw. (11) entspricht 10 unabhängigen Bedingungen (keine 16, da  $\mu \leftrightarrow \nu$  dieselbe Gleichung liefert, d.h. (10) symmetrisch in  $\mu$ - $\nu$  ist).

→ 6 freie Parameter bzw. unabhängige Transformationen  $\Lambda$ .

- 3 Parameter sollten (zeitunabhängigen) Rotationen entsprechen:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix} \quad (12)$$

( $\mathcal{R}$  ist  $3 \times 3$ -Rotationsmatrix) eingesetzt in (11) liefert

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix} \quad (13)$$

bzw.  $\mathbb{1} = \mathcal{R}^T \mathcal{R}$  (definierende Eigenschaft von Rotationsmatrizen); Rotationsmatrizen sind also Lorentz-Transformationen.

– Beispiel zur Erinnerung: Rotation um Winkel  $\alpha$  um die  $z$ -Achse,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} +\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ +\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

bzw.

$$\Lambda = \mathcal{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & +\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

(Rotation um  $x$ - und  $y$ -Achse analog).

- Verbleibende 3 Parameter sollten Transformationen zwischen Inertialsystemen entsprechen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen (sogenannte **Boosts**).

- Relativistisches Analog von (1).
- Werden Zeitkoordinate miteinbeziehen.
- Werden aufgrund von (11) ähnliche Struktur, wie Rotationsmatrizen aufweisen.

Versuch (Boost in  $x$ -Richtung):

$$\Lambda = \mathcal{B}_x(\phi) = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi) & +\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ +\sinh(\phi) & +\cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

... erfüllt  $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ , wie man leicht nachrechnen kann.

- Analog Boosts in  $y$ - und  $z$ -Richtung:

$$\Lambda = \mathcal{B}_y(\phi) = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi) & 0 & +\sinh(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\sinh(\phi) & 0 & +\cosh(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\Lambda = \mathcal{B}_z(\phi) = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi) & 0 & 0 & +\sinh(\phi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\sinh(\phi) & 0 & 0 & +\cosh(\phi) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

- Diese 6 Lorentz-Transformationen (3 Boosts, 3 Rotationen) sind unabhängig, d.h. keine dieser 6 Transformationen kann aus den jeweils anderen 5 zusammengesetzt werden (kann man zeigen).
- Jede Lorentz-Transformation (d.h. jedes  $\Lambda$ , das (10) bzw. (11) erfüllt [ausgenommen Zeit- und Raumspiegelungen]), kann durch geeignete Hintereinanderausführung der obigen 3 Boosts und 3 Rotationen zusammengesetzt werden (kann man zeigen).

\*\*\*\*\* 22. April 2022 (3. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Was ist Bedeutung des Parameters  $\phi$  (wird als **Rapidity** bezeichnet), d.h. in welcher Beziehung steht er zur Boost-Geschwindigkeit  $v$ ?
  - $\Sigma$  bewegt sich relativ zu  $\Sigma'$  mit Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung, d.h.  $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$  mit  $\Lambda = \mathcal{B}_x$  entsprechend (16).
  - Betrachte **Weltlinie** eines ruhenden Teilchens in  $\Sigma$ :  $x_T^{\mu} = (ct, 0)$  (Weltlinie ersetzt in relativistischer Mechanik die Trajektorie).

– In  $\Sigma'$  gilt

$$x_T^\mu = (ct', vt') \quad (19)$$

und damit

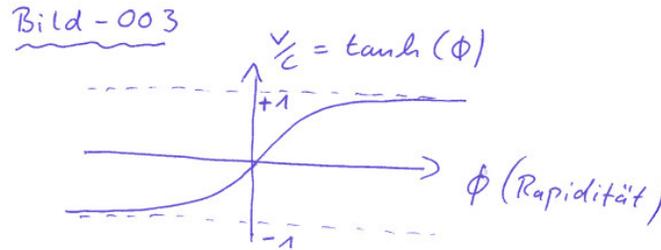
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ vt' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +\cosh(\phi) & +\sinh(\phi) \\ +\sinh(\phi) & +\cosh(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi)ct \\ +\sinh(\phi)ct \end{pmatrix} \\ \rightarrow ct &= \frac{1}{\cosh(\phi)} ct' \\ \rightarrow vt' &= \sinh(\phi)ct = \frac{\sinh(\phi)}{\cosh(\phi)} ct' \end{aligned} \quad (20)$$

sowie

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh(\phi)}{\cosh(\phi)} = \tanh(\phi). \quad (21)$$

– Für  $v/c \ll 1$  (bzw.  $\phi \ll 1$ ) gilt  $v/c \approx \phi$  (Taylor Näherung:  $\tanh(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ ), d.h. Geschwindigkeit und Rapidität sind gleichbedeutend (bis auf Faktor  $c$ ).

–  $v/c \rightarrow \pm 1$  entspricht  $\phi \rightarrow \pm\infty$ .



– Parametrisieren von Boosts durch Geschwindigkeiten  $v$  an Stelle von Rapiditäten  $\phi$  (benutze  $\tanh(\phi) = \sinh(\phi)/\cosh(\phi)$  und  $\cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{c^2} &= \frac{\sinh^2(\phi)}{\cosh^2(\phi)} = \frac{\cosh^2(\phi) - 1}{\cosh^2(\phi)} \\ \rightarrow \frac{v^2}{c^2} \cosh^2(\phi) &= \cosh^2(\phi) - 1 \\ \rightarrow \cosh^2(\phi) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= 1 \\ \rightarrow \cosh^2(\phi) &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \\ \rightarrow \sinh^2(\phi) &= \cosh^2(\phi) - 1 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \frac{v^2}{c^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

d.h. mit  $\beta = v/c$  und  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  und wird (16) bis (18) zu

$$\Lambda = \mathcal{B}_x(v) = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & +\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\Lambda = \mathcal{B}_y(v) = \begin{pmatrix} +\gamma & 0 & +\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & 0 & +\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\Lambda = \mathcal{B}_z(v) = \begin{pmatrix} +\gamma & 0 & 0 & +\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\gamma\beta & 0 & 0 & +\gamma \end{pmatrix} \quad (25)$$

– Grenzfall  $v/c \ll 1$ :  $\gamma = 1 + \mathcal{O}((v/c)^2)$  und damit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \mathcal{B}_x(v) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ct + \mathcal{O}(v/c) \\ x + vt + \mathcal{O}(v^2/c^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

d.h. man erhält die Galilei-Transformation (1) mit  $t_0 = 0$  und  $x_0 = 0$ .

### 1.3 Obere und untere Indizes

- Um Ausdrücke, in denen die Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  vorkommt, z.B.  $x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$  (Raumzeitabstand zu 0), kompakter schreiben zu können, verwendet man obere Indizes (**kontravariante Indizes**), z.B.  $x^\mu$ , und untere Indizes (**kovariante Indizes**), z.B.  $x_\mu$ .
- $x^\mu \neq x_\mu$ , d.h. ob Indizes oben oder unten stehen ist von Bedeutung.
- Definition  $x_\mu$ :  $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ , d.h. mit Hilfe der Metrik kann ein oberer Index nach unten gezogen werden.
- Da  $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ , gilt  $x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$ . Damit kann z.B. der Raumzeitabstand zu 0 als  $x^\mu x_\mu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$  geschrieben werden.
- Da  $x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$  invariant unter Lorentz-Transformationen (**Lorentz-invariant**) ist (siehe (9)), ist auch  $x^\mu x_\mu$  Lorentz-invariant.
- Allgemein: Sind die Indizes  $\mu$  von  $A^\mu$  und  $B^\mu$  Lorentz-Indizes, d.h. transformieren sich  $A^\mu$  und  $B^\mu$  unter Lorentz-Transformationen gemäß  $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$  und  $B'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu B^\nu$ , dann gilt

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\rho A^\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma B^\sigma = A^\rho \eta_{\rho\sigma} B^\sigma = A^\rho B_\rho \quad (27)$$

((10) wurde verwendet), d.h. wird über einen oberen und einen unteren Index summiert, ist die Summe Lorentz-invariant.

- Wird über Indizes summiert, d.h. tritt ein Index doppelt auf, dann immer einmal oben und einmal unten.

**In SRT wird nie über zwei obere oder über zwei untere Indizes summiert.**

Z.B. ist  $x^\mu x^\mu = c^2 t^2 + \mathbf{x}^2$  nicht Lorentz-invariant und tritt daher in relativistisch sinnvollen Gleichungen nicht auf. (Sinnvolle Gleichungen müssen in allen Inertialsystemen gleich aussehen.)

- Definition:  $\eta^{\mu\nu}$  ist invers zu  $\eta_{\mu\nu}$ , also im einfachen Fall der Minkowski Metrik  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

- Damit

$$\begin{aligned}
 x_\mu &= \eta_{\mu\nu} x^\nu \\
 \rightarrow \eta^{\rho\mu} x_\mu &= \underbrace{\eta^{\rho\mu} \eta_{\mu\nu}}_{=\delta_{\rho\nu}} x^\nu = x^\rho \\
 \rightarrow x^\mu &= \eta^{\mu\nu} x_\nu,
 \end{aligned} \tag{28}$$

d.h. mit Hilfe der Metrik kann auch ein unterer Index nach oben gezogen werden (beim Kronecker- $\delta$  stehen die Indizes immer unten, d.h. es wird nicht zwischen ko- und kontravarianten Indizes unterschieden;  $\delta_{\mu\nu}$  deutet lediglich an, dass für  $\mu \neq \nu$  der Ausdruck gleich 0 ist).

- $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$  und  $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \eta^\mu{}_\rho$  und damit  $\eta^\mu{}_\rho = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$ ; analog  $\eta_\mu{}^\rho = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$  (äquivalent zu  $\delta_{\mu\nu}$  kann daher auch  $\eta^\mu{}_\nu$  bzw.  $\eta_\mu{}^\nu$  verwendet werden, wobei im Gegensatz zu  $\delta_{\mu\nu}$  die Unterscheidung und Bedeutung oberer und unterer Indizes erhalten bleibt).

- Außerdem

$$A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\rho} A_\rho \eta_{\mu\sigma} B^\sigma = A_\rho \eta^{\rho\mu} \eta_{\mu\sigma} B^\sigma = A_\rho B^\rho \tag{29}$$

( $\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}$  und  $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta_{\mu\rho}$  wurde verwendet).

\*\*\*\*\* 23. April 2022 (4. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## 1.4 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

- “Addition” von gleichgerichteten Geschwindigkeiten (besser Kombination von Geschwindigkeiten):

- Ein Teilchen bewegt sich mit Geschwindigkeit  $u$  in  $\Sigma$ , d.h.  $x_T = ut$ . Mit welcher Geschwindigkeit  $u'$  bewegt es sich in  $\Sigma'$  (wie geht es sich in  $\Sigma'$  mit Geschwindigkeit  $v$  in  $\Sigma'$ )?

- Nicht-relativistisch:  $u' = v + u$ .

- Relativistisch:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} ct' \\ x'_T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ut \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma(1 + \beta u/c)ct \\ \gamma(\beta + u/c)ct \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\rightarrow ct = \frac{ct'}{\gamma(1 + \beta u/c)}$$

$$\rightarrow x'_T = \frac{\gamma(\beta + u/c)ct'}{\gamma(1 + \beta u/c)} = \frac{v + u}{1 + vu/c^2} t' \tag{31}$$

und nach Vergleich mit  $x'_T = u't'$

$$u' = \frac{v + u}{1 + vu/c^2}. \quad (32)$$

- Addition von gleichgerichteten Rapiditäten:

- $v, u$  zugeordnete Rapiditäten:  $\phi, \psi$ , d.h.  $v/c = \sinh(\phi)/\cosh(\phi)$  und  $u/c = \sinh(\psi)/\cosh(\psi)$ .

- Einsetzen in (32):

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(\psi')}{\cosh(\psi')} &= \frac{\sinh(\phi)/\cosh(\phi) + \sinh(\psi)/\cosh(\psi)}{1 + \sinh(\phi)\sinh(\psi)/\cosh(\phi)\cosh(\psi)} = \\ &= \frac{\sinh(\phi)\cosh(\psi) + \cosh(\phi)\sinh(\psi)}{\cosh(\phi)\cosh(\psi) + \sinh(\phi)\sinh(\psi)} = \frac{\sinh(\phi + \psi)}{\cosh(\phi + \psi)}. \end{aligned} \quad (33)$$

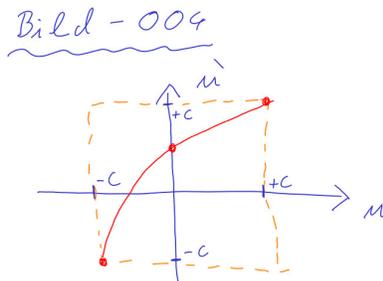
- Damit  $\psi' = \phi + \psi$ , d.h. simple Addition von Rapiditäten.

- Vorteil von Rapiditäten gegenüber Geschwindigkeiten:

- Elegantere Formulierung, zeigt Parallelen zu Rotationen.
- Kombination von Rapiditäten einfach (simple Addition).

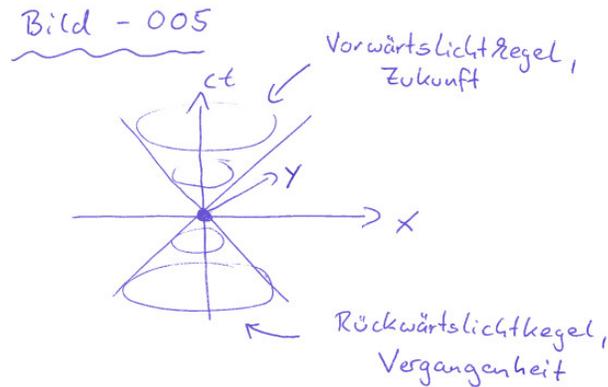
- Dennoch häufig Verwendung von Geschwindigkeiten an Stelle von Rapiditäten (entspricht wohl eher unserer nicht-relativistischen Denkweise).

- (32) spiegelt Tatsache wieder, dass “Addition” zweier Geschwindigkeiten  $\leq c$  wieder zu Geschwindigkeit  $\leq c$  führt.



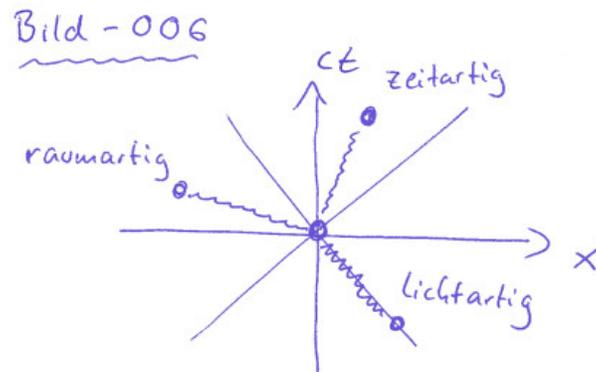
- Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit und **Kausalität**:

- **Vorwärtslichtkegel** (bei 0):  $x_\mu x^\mu = 0$  mit  $x^0 \geq 0$ .  
Es besteht die Möglichkeit, Ereignisse im Vorwärtslichtkegel zu beeinflussen.
- **Rückwärtslichtkegel** (bei 0):  $x_\mu x^\mu = 0$  mit  $x^0 \leq 0$ .  
Es besteht die Möglichkeit, von Ereignissen im Rückwärtslichtkegel beeinflusst worden zu sein.
- Alle Ereignisse außerhalb des Lichtkegels können weder beeinflusst werden, noch kann man von ihnen beeinflusst worden sein.



- Klassifikation von Raumzeitabständen:

- $x_\mu x^\mu > 0$ : **Zeitartiger Abstand** zwischen  $x^\mu$  und 0, d.h.  $x^\mu$  im Lichtkegel von 0 und umgekehrt.
- $x_\mu x^\mu < 0$ : **Raumartiger Abstand** zwischen  $x^\mu$  und 0, d.h.  $x^\mu$  außerhalb des Lichtkegels von 0 und umgekehrt.
- $x_\mu x^\mu = 0$ : **Lichtartiger Abstand** zwischen  $x^\mu$  und 0, d.h.  $x^\mu$  auf dem Lichtkegel von 0 und umgekehrt, also  $x^\mu$  und 0 durch ein Lichtsignal verbunden.



## 1.5 Zeitdilatation

- Zeit ist nicht absolut in SRT, Lorentz-Transformationen mischen Raum und Zeit.
- Ein Beobachter  $B'$  sieht die Uhr eines sich relativ zu ihm mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Beobachters  $B$  langsamer laufen, als seine eigene Uhr (**Zeitdilatation**).
- Beobachter  $B$  ruht in  $\Sigma$ , Weltlinie  $x^\mu = (ct, 0)$ , wobei  $t$  die Zeit ist, die  $B$ s Uhr anzeigt.
- Beobachter  $B'$  ruht in  $\Sigma'$ , Weltlinie  $x'^\mu = (ct', 0)$ , wobei  $t'$  die Zeit ist, die  $B'$ s Uhr anzeigt.
- Weltlinie von  $B$  in  $\Sigma'$ :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct \\ \gamma\beta ct \end{pmatrix}, \quad (34)$$

d.h.

$$t' = \gamma t. \quad (35)$$

- Da  $\gamma \geq 1$ , sieht  $B'$  die von  $B$  mitgeführte Uhr um Faktor  $\gamma$  langsamer laufen als seine eigene Uhr (z.B. für Relativgeschwindigkeit  $v = (\sqrt{3}/2)c$  um Faktor  $\gamma = 2$ ).
- Umgekehrt gilt das Gleiche, da sich  $B'$  in  $\Sigma$  mit Geschwindigkeit  $v$  bewegt:

$$t = \gamma t', \quad (36)$$

d.h.  $B$  sieht die von  $B'$  mitgeführte Uhr um den Faktor  $\gamma$  langsamer laufen als seine eigene Uhr.

- Wie kann das sein? Wie ist (35) mit (36) vereinbar? Widerspruch?
- Erklärung: Ereignisse, die für  $B$  gleichzeitig stattfinden (z.B. Ablesen der eigenen Uhr und der Uhr von  $B'$ ), finden für  $B'$  zu verschiedenen Zeiten statt (und umgekehrt).

\*\*\*\*\* 29. April 2016 (5. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Besseres Verständnis durch Raumzeit-Diagramm:

- Relativgeschwindigkeit  $v$  zugeordnete Relativrapidity:  $\phi = \operatorname{artanh}(v/c)$ .
- Splitte Boost von  $\Sigma$  nach  $\Sigma'$  in zwei Boosts mit Rapidity  $\phi/2$  auf und führe ein neues "Hilfsinertialsystem"  $\Sigma''$  ein (nicht unbedingt notwendig, aber praktisch für schnelles maßstabsgetreues Skizzieren von Raumzeitdiagrammen):  $\Sigma \xleftarrow{-\phi/2} \Sigma'' \xrightarrow{+\phi/2} \Sigma'$ .
- Zeichne  $\Sigma''$  mit orthogonalen Koordinatenachsen (horizontal  $x''$ , vertikal  $ct''$ ) ohne eine Skala aufzutragen.
- Zeichne Koordinatenachsen von  $\Sigma$  (aus Sicht von  $\Sigma''$ ) ins gleiche Diagramm:

\* Boost zwischen  $\Sigma$  und  $\Sigma''$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +\cosh(\phi/2) & +\sinh(\phi/2) \\ +\sinh(\phi/2) & +\cosh(\phi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} +\cosh(\phi/2)ct + \sinh(\phi/2)x \\ +\sinh(\phi/2)ct + \cosh(\phi/2)x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37)$$

\*  $t$ -Achse entspricht  $x = 0$ , hat in  $\Sigma''$  die Form  $(\cosh(\phi/2), \sinh(\phi/2))ct$ , wird parametrisiert durch  $t$  (Auftragen einer Skala noch nicht nötig).

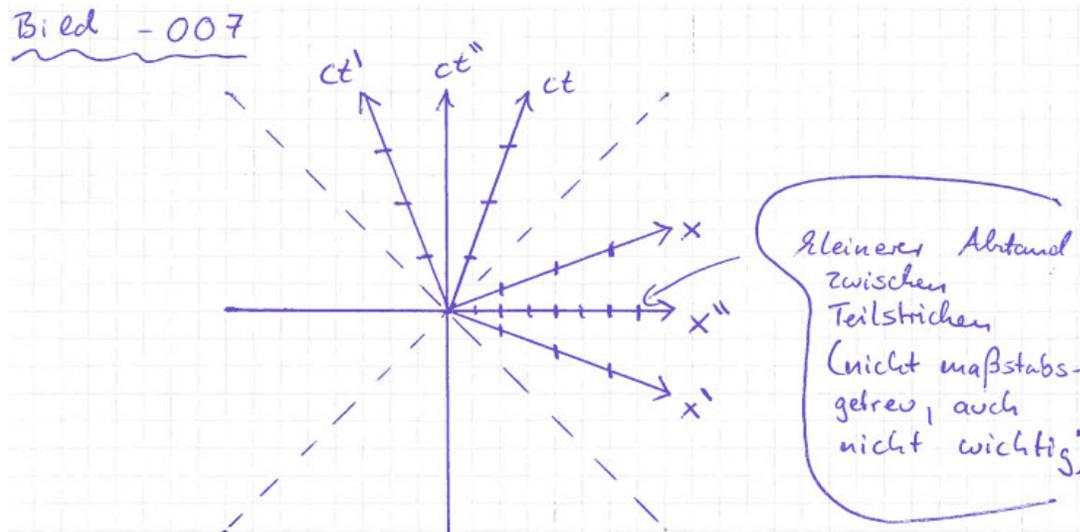
\*  $x$ -Achse entspricht  $t = 0$ , hat in  $\Sigma''$  die Form  $(\sinh(\phi/2), \cosh(\phi/2))x$ , wird parametrisiert durch  $x$  (Auftragen einer Skala noch nicht nötig).

- Analog: Zeichne Koordinatenachsen von  $\Sigma'$  (aus Sicht von  $\Sigma''$ ) ins gleiche Diagramm:

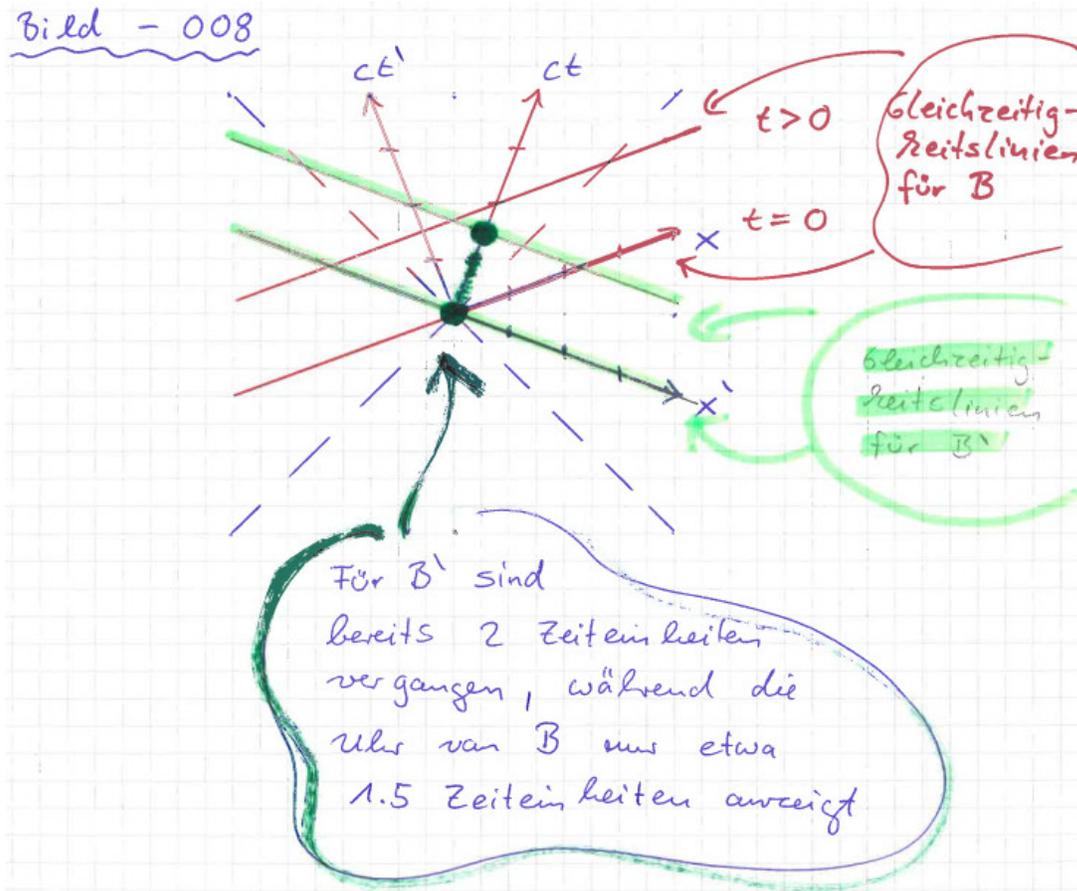
\* Boost zwischen  $\Sigma'$  und  $\Sigma''$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +\cosh(\phi/2) & -\sinh(\phi/2) \\ -\sinh(\phi/2) & +\cosh(\phi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} +\cosh(\phi/2)ct' - \sinh(\phi/2)x' \\ -\sinh(\phi/2)ct' + \cosh(\phi/2)x' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (38)$$

- Trage auf den vier Achsen ( $t, x, t', x'$ ) die gleiche (beliebige) Skala ein (alle sind um den gleichen Winkel bezüglich den orthogonalen Achsen ( $t''$  und  $x''$ ) verdreht bzw. mit der gleichen Rapidität geboostet, d.h. gleicher Abstand zwischen Teilstrichen [der Grund, warum es zweckmäßig ist, den Boost zwischen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  zu splitten]).



- Raumzeitdiagramm macht deutlich,
  - dass Gleichzeitigkeit für  $B$  (parallele Linie zur  $x$ -Achse definiert durch  $t = \text{const}$ ) nicht Gleichzeitigkeit für  $B'$  (parallele Linie zur  $x'$ -Achse definiert durch  $t' = \text{const}$ ) entspricht,
  - dass nach vergangener Zeit  $t$  in  $\Sigma$  (Anzahl der Einheiten auf der  $t$ -Achse um die die "Gleichzeitigkeitslinie" von  $B$  verschoben ist) die Uhr von  $B'$  eine geringere Zeitdifferenz anzeigt (Anzahl der Einheiten auf der  $t'$ -Achse bis zum Schnittpunkt mit der Gleichzeitigkeitslinie von  $B$ ),
  - dass nach vergangener Zeit  $t'$  in  $\Sigma'$  (Anzahl der Einheiten auf der  $t'$ -Achse um die die Gleichzeitigkeitslinie von  $B'$  verschoben ist) die Uhr von  $B$  eine geringere Zeitdifferenz anzeigt (Anzahl der Einheiten auf der  $t$ -Achse bis zum Schnittpunkt mit der Gleichzeitigkeitslinie von  $B'$ ),



- Beispiel: Kosmische Myonen (Myon = eine Art schweres Elektron).
  - Entstehen bei Kollisionen der kosmischen Strahlung (vor allem aus dem Weltall kommende Protonen) mit Atomkernen der oberen Atmosphäre (in  $\approx 10$  km Höhe).
  - Mittlere Lebensdauer:  $\tau_\mu \approx 2 \times 10^{-6}$  s (Myon zerfällt in ein Elektron und zwei Neutrinos).
  - Mittlere Geschwindigkeit:  $v \approx 0.998 c$ .
  - Nicht-relativistische Überlegung:  $v\tau \approx (3 \times 10^8 \text{ m/s})(2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 600 \text{ m}$ , Myonen würden also in  $\approx 9$  km Höhe bereits wieder zerfallen und sicher nicht die Erdoberfläche erreichen.
  - Sie werden aber auf der Erdoberfläche beobachtet. Warum?
  - Relativistische Überlegung:
    - \* Mittlere Lebensdauer bezieht sich auf Zeit im System des Myons.
    - \* Die vom Myon mitgeführte Uhr läuft aber aus Sicht eines Experimentators auf der Erdoberfläche langsamer aufgrund der Zeitdilatation, d.h. mittlere Lebensdauer im System des Experimentators

$$\begin{aligned} \tau_{\mu, \text{Experimentator}} &= \gamma \tau_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tau \approx 15.8(2 \times 10^{-6} \text{ s}) = \\ &= 31.6 \times 10^{-6} \text{ s}. \end{aligned} \quad (39)$$

- \* Zurückgelegte Strecke aus Sicht des Beobachters auf der Erdoberfläche:  
 $v\tau_{\mu, \text{Experimentator}} \approx (3 \times 10^8 \text{ m/s})(31.6 \times 10^{-6} \text{ s}) = 9480 \text{ m}.$
- \* Ein signifikanter Teil der Myonen erreicht also die Erdoberfläche.

## 1.6 Längenkontraktion

- Bewegt sich ein Objekt relativ zu einem Beobachter, ist es aus dessen Sicht in Bewegungsrichtung kürzer, als wenn es relativ zu diesem Beobachter ruht (**Längenkontraktion**).
- Betrachte Stab in 1 Raumdimension, Endpunkte  $A$  und  $B$ .
- Stab ruht in  $\Sigma$ , Weltlinien der Endpunkte in  $\Sigma$  sind  $x_A^\mu = (ct, 0)$  und  $x_B^\mu = (ct, L)$ , d.h. Stab hat in Ruhe Länge  $L$ .
- Längenmessung in  $\Sigma'$  zum Zeitpunkt  $t' = 0$ :

– Lorentz-Transformation zwischen  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (40)$$

–  $t' = 0$  liefert Beziehung zwischen  $t$  und  $x$ ,  $0 = ct + \beta x$  bzw.  $t(t' = 0, x) = -\beta x/c$ , d.h. abhängig von der räumlichen Koordinate  $x$  in  $\Sigma$  entsprechen verschiedene Zeitpunkte  $t$  in  $\Sigma$  dem gleichen Zeitpunkt  $t' = 0$  in  $\Sigma'$ .

– Eine Längenmessung ist ein Vergleich der Endpunkte  $A$  und  $B$  zu gleicher Zeit, hier bei  $t' = 0$  in  $\Sigma'$  (in  $\Sigma$  entspricht diese Längenmessung in  $\Sigma'$  einem Vergleich der Endpunkte  $A$  und  $B$  zu verschiedenen Zeiten).

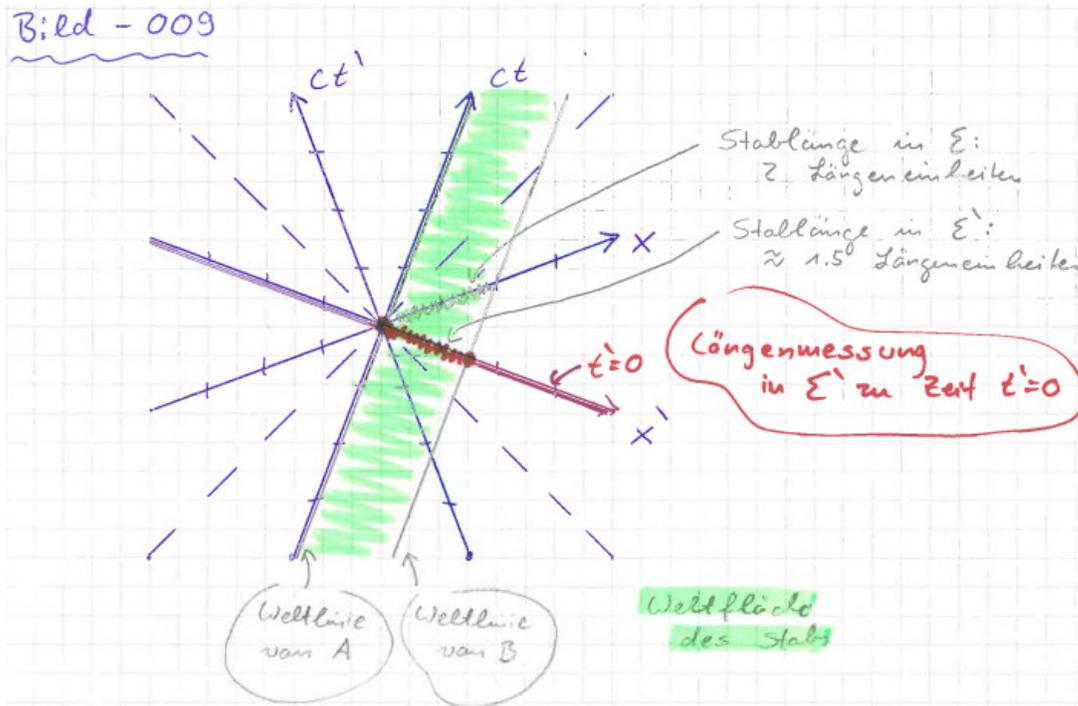
– Endpunkt  $A$ :

$$x'_A(t' = 0) = \gamma(vt(t' = 0, x_A) + x_A) = 0. \quad (41)$$

– Endpunkt  $B$ :

$$x'_B(t' = 0) = \gamma(vt(t' = 0, x_B) + x_B) = \gamma(-v\beta L/c + L) = \frac{1}{\gamma}L. \quad (42)$$

- Da  $\gamma \geq 1$ , ist der bewegte Stab in  $\Sigma'$  um den Faktor  $\gamma$  kürzer als der unbewegte Stab in  $\Sigma$ .
- Besseres Verständnis durch Raumzeitdiagramm.



- Umgekehrt gilt das Gleiche, d.h. z.B. für zwei sich entgegenkommende Autofahrer ist das Auto des jeweils anderen Fahrers in Fahrtrichtung längenkontrahiert.
- Beispiel: Kosmische Myonen.

- Mittlere Lebensdauer  $\tau \approx 2 \times 10^{-6}$  s bezieht sich auf Zeit im System des Myons.
- Abstand zur Erdoberfläche ist längenkontrahiert, da sich umgebener Raum einschließlich Erde relativ zum Myon mit Geschwindigkeit  $v \approx 0.998 c$  bewegt, statt  $\approx 10$  km im System des Myons nur

$$\frac{1}{\gamma} \times 10 \text{ km} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \times 10 \text{ km} \approx 0.063 \times 10 \text{ km} = 630 \text{ m.} \quad (43)$$

- $v\tau \approx (3 \times 10^8 \text{ m/s})(2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 600 \text{ m}$ , d.h. gleiches Ergebnis wie in Abschnitt 1.5, diesmal im System des Myons berechnet: Ein signifikanter Teil der Myonen erreicht die Erdoberfläche.

\*\*\*\*\* 03. Mai 2022 (6. Vorlesung) \*\*\*\*\*

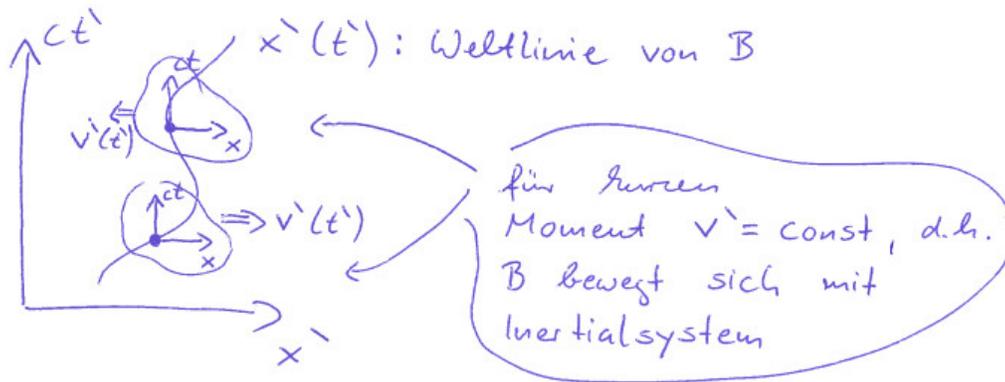
## 1.7 Eigenzeit, Zwillingsparadoxon

- Lorentz-Transformationen sind lineare Abbildungen, daher auch für finite Differenzen  $\Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu$  und infinitesimale Differenzen  $dx^\mu = (cdt, d\mathbf{x})$  gültig,

$$\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu \quad , \quad dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu. \quad (44)$$

- **Eigenzeit** (meistens mit  $\tau$  bezeichnet): Zeit, die für einen Beobachter  $B$  (muss sich nicht mit einem Inertialsystem bewegen, d.h. kann beschleunigen und/oder abbremsen) vergeht, d.h. auf seiner mitgeführten Uhr angezeigt wird (Definition unabhängig vom System, d.h. Eigenzeit  $\tau$  ist Lorentz-invariant).
- Bewegung von  $B$  in  $\Sigma'$ :  $x_B^\mu = (ct', x'(t'))$ .

Bild - 010



- Für infinitesimale Zeitspanne  $dt'$  hat  $B$  konstante Geschwindigkeit in  $\Sigma'$ ,

$$v'(t') = \frac{dx'(t')}{dt'}, \quad (45)$$

ruht also in relativ bewegtem Inertialsystem  $\Sigma$  (geboostet mit  $v'(t')$  bezüglich  $\Sigma'$ ), daher

$$dt' = \gamma dt \quad (46)$$

(siehe (35), Zeitdilatation);  $d\tau = dt$ , d.h.  $dt$  entspricht Beitrag zur Eigenzeit.

- Berechnung der Eigenzeit:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt' = \sqrt{1 - v'^2(t')/c^2} dt'$$

$$\rightarrow \tau = \tau_f - \tau_i = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau = \int_{t'_i}^{t'_f} dt' \sqrt{1 - v'^2(t')/c^2}, \quad (47)$$

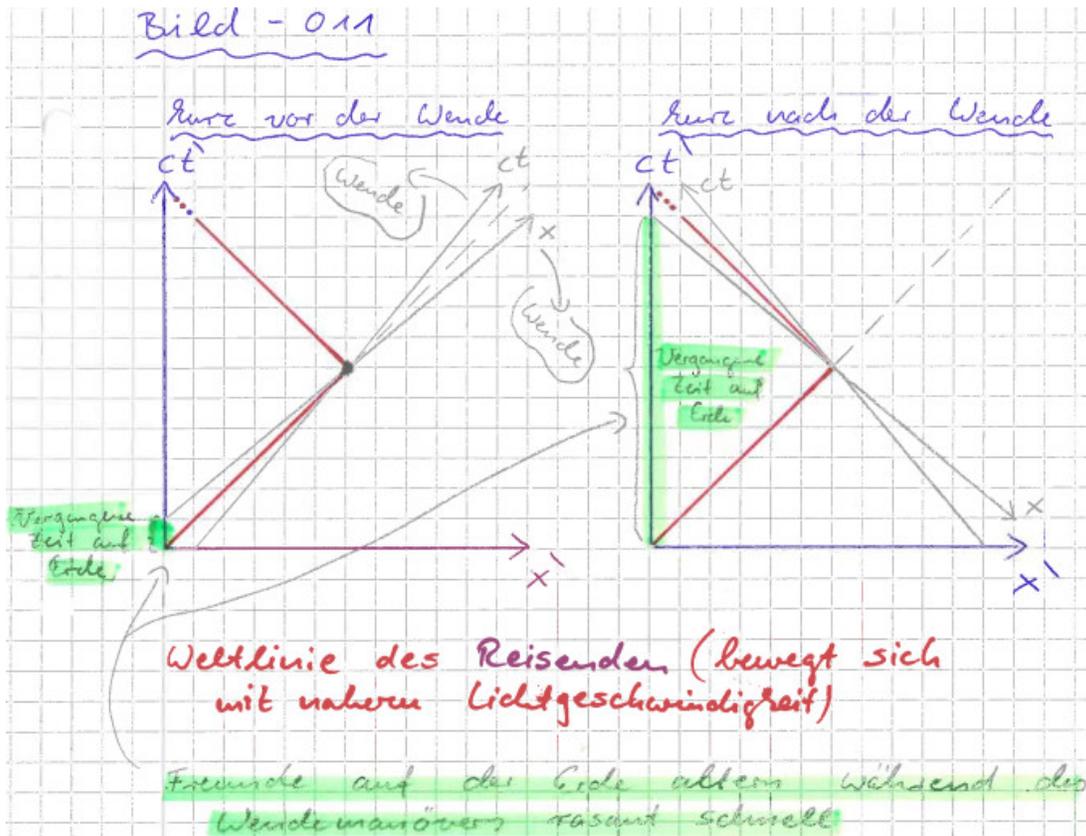
wobei Indizes  $i$  und  $f$  Anfangs- und Endpunkt der Bewegung bezeichnen (initial, final).

- Außerdem gilt

$$d\tau = \sqrt{1 - v'^2(t')/c^2} dt' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt'^2 - \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 dt'^2} = \frac{1}{c} \sqrt{dx'^\mu dx'_\mu}, \quad (48)$$

wobei  $dx'^\mu dx'_\mu$  ein Produkt zweier Vierervektoren und damit Lorentz-invariant ist.

- Explizit gezeigt, dass  $d\tau$  und damit Eigenzeit  $\tau$  Lorentz-invariant ist.
- Eigenzeit entspricht zurückgelegter Entfernung in Raumzeit (nicht Euklidische Entfernung, sondern Entfernung berechnet mit Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$ ).
- **Zwillingsparadoxon** (kein Paradoxon, zumindest nicht für den gebildeten Physiker):
  - Bewegung mit nahezu Lichtgeschwindigkeit: Uhr des Reisenden steht aus Sicht des umgebenden Raums fast still, d.h. kein Altern des Reisenden, z.B. kann ein Mensch (Lebenserwartung  $\approx 100$  y) so problemlos zu einem 1000 ly entfernten Stern reisen (y = Jahr, ly = Lichtjahr).
  - Beispiel: Reise zu 1 ly entfernten Stern und zurück mit  $v/c = 0.99$ :
    - \* Auf Erde vergehen  $\Delta t \approx 2$  y.
    - \* Für Reisenden vergehen nur  $\Delta\tau = (1/\gamma)\Delta t = \sqrt{1 - v^2/c^2}\Delta t \approx 0.14(2\text{ y}) \approx 3.4$  Monate, er ist also kaum gealtert, während seine Freunde 2 Jahre älter sind.
  - Aber: Zeit auf Erde vergeht aus Sicht des Reisenden auch langsamer, d.h. müssten bei umgekehrter Betrachtungsweise nicht die zurückgebliebenen Freunde auf der Erde weniger schnell gealtert sein? Widerspruch?
  - Nein, “gegenseitige Zeitdilatation” ((35) und (36)) gilt nur für Inertialsysteme:
    - \* Beim Wendemanöver ist das System des Reisenden kein Inertialsystem.
    - \* Durch Wendemanöver verändert sich die relative Ausrichtung der Koordinatenachsen der Inertialsysteme des Reisenden  $\Sigma$  (unterscheide Hin- und Rückfluginertialsystem) zum Erdinertialsystem  $\Sigma'$ . (“Zeit auf Erde vergeht rasant während des Wendemanövers.”)
    - \* Besseres Verständnis durch Raumzeitdiagramme.



## 1.8 Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls

- Im Rahmen der SRT sinnvolle Gleichungen sehen in allen Inertialsystemen gleich aus, d.h. sind forminvariant unter Lorentz-Transformationen; sie können daher nur aus Lorentz-Skalaren (= Lorentz-invariante Größen), Lorentz-Vektoren (= Vierervektoren) und Lorentz-Tensoren (= Objekte, mit zwei oder mehr Lorentz-Indizes) aufgebaut sein.

- Ziel relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen BGI

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = m\frac{d}{dt}\mathbf{v} = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x} = \mathbf{F}. \quad (49)$$

- $t$  ist keine Lorentz-Invariante, sondern eine Komponente des Vierervektors  $x^\mu$ , d.h.  $t$  und ebenso  $d/dt$  sollten (ohne die verbleibenden drei anderen Komponenten) nicht in einer relativistischen Gleichung auftreten.

- $\mathbf{x}$  ist kein Vierervektor, sondern nur ein Teil davon, die drei räumlichen Komponenten.

- Versuch:  $t \rightarrow \tau$  (Eigenzeit statt Zeit) und  $\mathbf{x} \rightarrow x^\mu$  (Raumzeitvektor statt Position).

- Damit relativistische Verallgemeinerung der Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{x} \rightarrow u^\mu = \frac{d}{d\tau}x^\mu \quad (50)$$

(Vierergeschwindigkeit).

- Interpretation der vier Komponenten durch Verwendung von  $dt = \gamma d\tau$ :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \gamma = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}). \quad (51)$$

- Die räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  entsprechen nicht der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , sondern  $\gamma \mathbf{v}$ .
- Nicht-relativistischer Grenzfall:  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1 + \mathcal{O}((v/c)^2)$  und damit  $u^\mu = (c, \mathbf{v})(1 + \mathcal{O}((v/c)^2))$ , also  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ .
- $u^\mu u_\mu = c^2$ ,

\* entweder durch explizites Ausrechnen,

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2, \quad (52)$$

\* oder durch “einfaches Auswerten” in geschickt gewähltem Inertialsystem, dem mitbewegten System mit  $\mathbf{v} = 0$ , d.h.  $\gamma = 1$  und  $u^\mu = (c, 0)$ ,

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = c^2 \quad (53)$$

( $u^\mu u_\mu$  ist Lorentz-invariant und damit in jedem Inertialsystem gleich).

- Damit relativistische Verallgemeinerung des Impulses:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d}{dt} \mathbf{x} \rightarrow p^\mu = mu^\mu = m \frac{d}{d\tau} x^\mu \quad (54)$$

(**Viererimpuls**).

$$- p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \mathbf{v}).$$

– **Relativistische Energie-Impuls-Beziehung:**

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (55)$$

und damit

$$\begin{aligned} p^0 c &= \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + (m\gamma \mathbf{v})^2 / m^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \gamma^2 \mathbf{v}^2 / c^2} = \\ &= mc^2 \left( 1 + \frac{\gamma^2 \mathbf{v}^2}{2c^2} + \mathcal{O}((v/c)^4) \right) = mc^2 \left( 1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} + \mathcal{O}((v/c)^4) \right) \approx \\ &\approx mc^2 + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \end{aligned} \quad (56)$$

( $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + \mathcal{O}(x^2)$  und  $\gamma = 1 + \mathcal{O}((v/c)^2)$  wurden verwendet);  $m\mathbf{v}^2/2$  ist die nicht-relativistische kinetische Energie, daher Interpretation  $p^0 = E/c$ , wobei  $E$  die Energie bezeichnet,

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \quad , \quad (E/c)^2 = m^2 c^2 + \mathbf{p}^2. \quad (57)$$

- Energie eines ruhenden Teilchens:  $E = mc^2$  (“Einsteins bekannte Formel”).

## 1.9 Relativistische BGI

- Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen BGI

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = m\frac{d}{dt}\mathbf{v} = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (58)$$

gemäß

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = m\frac{d}{d\tau}u^\mu = m\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu = K^\mu. \quad (59)$$

- Nicht-relativistische Kraft  $\mathbf{F}$  wird durch Vierervektor  $K^\mu$  ersetzt ( $K^\mu$  muss Vierervektor sein, da linke Seite [z.B.  $d^2x^\mu/d\tau^2$ ] Vierervektor ist und Gleichung sonst relativistisch nicht sinnvoll wäre).
- Bedingung an  $K^\mu$  durch Multiplikation von (59) mit  $p_\mu$ :

– Linke Seite:

$$p_\mu\frac{d}{d\tau}p^\mu = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}p_\mu p^\mu = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}m^2c^2 = 0. \quad (60)$$

– Rechte Seite:  $p_\mu K^\mu$ .

– Damit Bedingung

$$0 = p_\mu K^\mu. \quad (61)$$

– Z.B. im Ruhesystem des Teilchen  $p^\mu = (mc, 0)$  und damit  $K^\mu = (0, \mathbf{K})$ .

- Bedeutung der räumlichen Komponenten von  $K^\mu$ :

– Newtonsche BGI (58) gilt für kleine Geschwindigkeiten, z.B. zu einem beliebigem Zeitpunkt  $t$  in einem mit der Geschwindigkeit  $v(t)$  mitbewegten Inertialsystem  $\Sigma'$  (in diesem System hat das Teilchen Geschwindigkeit  $v' = 0$ ):

$$m\frac{d^2}{d\tau^2}x'^\mu = m\frac{d^2}{dt'^2}(ct', \mathbf{x}') = (0, \mathbf{F}). \quad (62)$$

– Vergleich von (59) und (62) führt zu  $K'^\mu = (K'^0, \mathbf{K}') = (0, \mathbf{F})$ .

– Die relativistische Kraft im Laborsystem ergibt sich durch Lorentz-Transformation, z.B. bei Bewegung des Teilchens in  $x$ -Richtung über

$$K^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu K'^\nu = (\mathcal{B}_x(v))^\mu{}_\nu K'^\nu = (+\gamma\beta F_x, +\gamma F_x, F_y, F_z). \quad (63)$$

\*\*\*\*\* 10. Mai 2016 (8. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## 1.10 Viererimpulserhaltung, relativistische Streuprozesse und Zerfälle

- Abgeschlossenes Vielteilchensystem in nicht-relativistischer Mechanik: Erhaltung des Gesamtimpulses,

$$\sum_j \mathbf{p}_j = \text{const} \quad (64)$$

( $j$ : Teilchenindex; siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2021/22], Abschnitt 6.3).

- Relativistisches Analog: Erhaltung des Gesamtviererimpulses (**Viererimpulserhaltung**),

$$\sum_j p_j^\mu = \text{const} \quad (65)$$

( $j$ : Teilchenindex;  $\mu$ : Lorentz-Index).

- Wichtige Anwendung bei Streuprozessen,

$$A + B \rightarrow C_1 + C_2 + \dots, \quad (66)$$

und bei Zerfällen,

$$A \rightarrow B_1 + B_2 + \dots, \quad (67)$$

wobei  $A$ ,  $B_{(j)}$  und  $C_{(j)}$  Teilchen bezeichnen.

- Einfaches Beispiel: Zerfall von einem Teilchen  $A$  in zwei Teilchen  $B$  und  $C$ ,

$$A \rightarrow B + C. \quad (68)$$

- Viererimpulserhaltung:

$$p_A^\mu = p_B^\mu + p_C^\mu. \quad (69)$$

- Diese vier Gleichungen schränken die möglichen Energien und Impulse der Teilchen  $A$ ,  $B$  und  $C$  ein.
- Häufig zweckmäßig: “Quadrieren” von (69) und Auswerten in geeignetem Inertialsystem.

\* Z.B.

$$p_{A,\mu} p_A^\mu = (p_B + p_C)_\mu (p_B + p_C)^\mu = p_{B,\mu} p_B^\mu + p_{C,\mu} p_C^\mu + 2p_{B,\mu} p_C^\mu \quad (70)$$

( $p_{C,\mu} p_B^\mu = p_C^\nu \eta_{\nu\mu} p_B^\mu = p_C^\nu p_{B,\nu} = p_{B,\mu} p_C^\mu$ ) bzw. in kompakterer und übersichtlicherer Notation

$$\begin{aligned} p_A^2 &= p_B^2 + p_C^2 + 2p_{BPC} \\ \rightarrow m_A^2 c^2 &= m_B^2 c^2 + m_C^2 c^2 + 2p_{BPC} \\ \rightarrow p_{BPC} &= \frac{(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2) c^2}{2} \end{aligned} \quad (71)$$

((55) wurde verwendet, d.h.  $p^2 = m^2 c^2$  in jedem Inertialsystem); Auswerten im Ruhesystem von  $B$  ( $p_B^\mu = (m_B c, 0)$ ,  $p_C^\mu = (E_C/c, \mathbf{p}_C)$ ) liefert

$$E_C = \frac{(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2)c^2}{2m_B}, \quad (72)$$

die Energie von  $C$  im Ruhesystem von  $B$ ; der Impulsbetrag von  $C$  im Ruhesystem von  $B$  lässt sich über die relativistische Energie-Impuls-Beziehung (57) bestimmen,

$$|\mathbf{p}_C| = \sqrt{E_C^2/c^2 - m_C^2 c^2}. \quad (73)$$

\* Will man Aussagen im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens  $A$  treffen ( $p_A^\mu = (m_A c, 0)$ ,  $p_B^\mu = (E_B/c, \mathbf{p}_B)$ ), muss (69) vor dem Quadrieren umgestellt werden,

$$\begin{aligned} p_A^\mu - p_B^\mu &= p_C^\mu \\ p_A^2 + p_B^2 - 2p_{APB} &= p_C^2 \\ \rightarrow m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2p_{APB} &= m_C^2 c^2 \\ \rightarrow p_{APB} &= \frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)c^2}{2} \\ \rightarrow E_B &= \frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)c^2}{2m_A} \\ \rightarrow |\mathbf{p}_B| &= \sqrt{E_B^2/c^2 - m_B^2 c^2}; \end{aligned} \quad (74)$$

außerdem folgt im Ruhesystem von  $A$  aus (69)

$$E_C = E_A - E_B = m_A c^2 - E_B, \quad \mathbf{p}_C = -\mathbf{p}_B. \quad (75)$$

\* Konkretes Beispiel aus der Elementarteilchenphysik: Ein ruhendes  $\rho$ -Meson ( $m_\rho = 775 \text{ MeV}/c^2$ ) zerfällt in zwei Pionen ( $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$ ),  $\rho \rightarrow \pi + \pi$ .

· Die beiden entstandenen Pionen haben Energie

$$E_\pi = \frac{(m_\rho^2 + m_\pi^2 - m_\pi^2)c^2}{2m_\rho} = \frac{m_\rho c^2}{2} = 388 \text{ MeV} \quad (76)$$

und entgegengesetzten Impuls mit Betrag

$$|\mathbf{p}_\pi| = \sqrt{E_\pi^2/c^2 - m_\pi^2 c^2} = 362 \text{ MeV}/c \quad (77)$$

sowie Geschwindigkeit mit Betrag

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_\pi| &= m_\pi \gamma |\mathbf{v}_\pi| \\ \rightarrow |\mathbf{v}_\pi| &= \sqrt{\frac{\mathbf{p}_\pi^2}{m_\pi^2 c^2 + \mathbf{p}_\pi^2}} c = 0.93 \times c \end{aligned} \quad (78)$$

( $m\gamma c = p^0 = E/c = \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}$  gemäß Abschnitt 1.8 wurde verwendet).

· Über die Impuls- und Geschwindigkeitsrichtungen kann keine Aussage getroffen werden.

## 2 Lagrange-Formalismus

- Wiki: “Der **Lagrange-Formalismus** ist in der Physik eine 1788 von Joseph Louis Lagrange eingeführte Formulierung der klassischen Mechanik, in der die Dynamik eines Systems durch eine einzige skalare Funktion, die Lagrange-Funktion, beschrieben wird. ... Aus der Lagrange-Funktion lassen sich die Bewegungsgleichungen mit den Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung bestimmen. Diese Betrachtungsweise vereinfacht viele physikalische Probleme, da sich, im Gegensatz zu der Newtonschen Formulierung der Bewegungsgesetze, im Lagrange-Formalismus Zwangsbedingungen relativ einfach durch ... die geeignete Wahl generalisierter Koordinaten berücksichtigen lassen. ...”
- Außerdem ist der Lagrange-Formalismus geradlinig auf fortgeschrittenere Theorien, z.B. Feldtheorien (Elektrodynamik, Quantenchromodynamik, Allgemeine Relativitätstheorie, etc.), anwendbar.

### 2.1 Prinzip der kleinsten Wirkung

- Pädagogische und unterhaltsame Einführung: Feynman Lectures, Volume 2, Chapter 19, “The Principle of Least Action”, <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II.19.html>.
- Betrachte im Folgenden ein nicht-relativistisches Teilchen (Position/Trajektorie  $\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3) = (x, y, z)$ , Masse  $m$ ) in einem Potential  $V(\mathbf{r})$  (also in einem konservativen Kraftfeld).
- **Lagrange-Funktion:**

$$L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = T - V. \quad (79)$$

- $T$ : Kinetische Energie, d.h. hier  $T = (m/2)\dot{\mathbf{r}}^2$ .
- $V$ : Potentielle Energie, d.h. hier  $V = V(\mathbf{r})$ .
- Explizite Zeitabhängigkeit selten, d.h. i.d.R.  $L = L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ .
- $L$  ist Funktion, bildet Parameter (d.h. Zahlen)  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  (nicht Funktion  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , sondern  $\dot{\mathbf{r}}$  zu fester Zeit  $t$ ),  $\mathbf{r}(t)$  (nicht Funktion  $\mathbf{r}(t)$ , sondern  $\mathbf{r}$  zu fester Zeit  $t$ ),  $t$  auf eine Zahl  $L$  ab.

- **Wirkung:**

$$S[\mathbf{r}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t). \quad (80)$$

- $S$  ist **Funktional**, bildet Funktion  $\mathbf{r}(t)$  auf eine Zahl  $S$  ab.

- **Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonsches Prinzip):**

- Von allen denkbaren Trajektorien vom Ort  $\mathbf{r}_i$  bei Zeit  $t_i$  zum Ort  $\mathbf{r}_f$  bei Zeit  $t_f$  ist in der Natur diejenige realisiert, die die Wirkung  $S[\mathbf{r}]$  extremal (i.d.R. minimal) macht.
- Mathematisch ausgedrückt

$$\frac{\delta S}{\delta r^j(t)} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \text{ und alle } t \in (t_i, t_f) \quad (81)$$

(das sind die Bedingungen für ein Extremum von  $S$ ).

- Äquivalent zu (81) ist

$$\delta S = 0, \quad (82)$$

da

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_j \frac{\delta S}{\delta r^j(t)} \delta r^j(t). \quad (83)$$

- Was bedeutet diese mathematische Schreibweise im Detail?

\* 1-dimensionales Analogon:

- Funktion  $S(r)$  ( $r$  ist eine Variable, keine Funktion).
- Bedingung für ein Extremum von  $S$ :

$$\frac{dS}{dr} = 0. \quad (84)$$

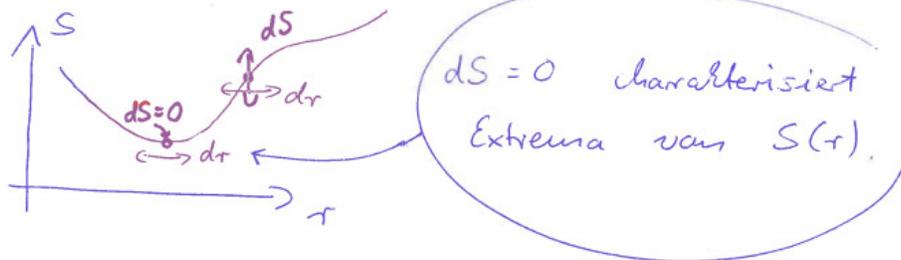
- Äquivalent zu (84) ist

$$dS = 0, \quad (85)$$

da

$$dS = \frac{dS}{dr} dr. \quad (86)$$

Bild - 012



\* 3n-dimensionales Analogon:

- Funktion  $S(r_k^j)$  ( $r_k^j$  [ $j = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, n$ ] sind Variablen, keine Funktionen).
- Bedingungen für ein Extremum von  $S$ :

$$\frac{\partial S}{\partial r_k^j} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \text{ und } k = 1, 2, \dots, n. \quad (87)$$

• Äquivalent zu (87) ist  

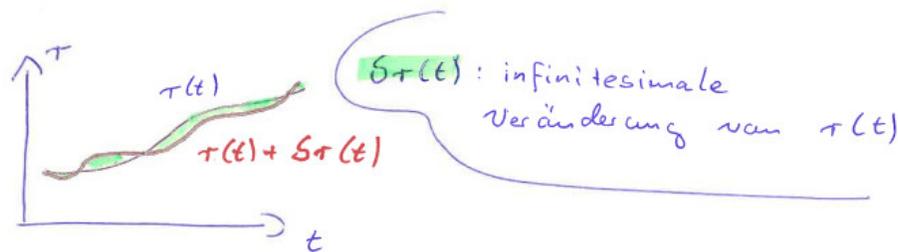
$$dS = 0, \tag{88}$$

da

$$dS = \sum_{k=1}^n \sum_j \frac{\partial S}{\partial r_k^j} dr_k^j. \tag{89}$$

- \* “Kontinuierlicher Index”  $t$  in (81) und (83) ersetzt diskreten Index  $k$  in (87) und (89).
- \*  $\delta/\delta r^j(t)$  nennt man **Funktionalableitung**, entspricht der partiellen Ableitung von  $S$  nach der Funktion  $r^j$  zum festen Zeitpunkt  $t$  (nicht nach der vollständigen Funktion  $r^j$ ).
- \* Integral (= “Summe über kontinuierlichen Index”)  $\int_{t_i}^{t_f} dt$  in (83) ersetzt Summe  $\sum_{k=1}^n$  in (89).
- \*  $\delta r^j(t)$  ist infinitesimale **Variation** der Funktion  $r^j(t)$ .

Bild - 013



- \* Entsprechendes Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Minimierung/Maximierung von Funktionalen beschäftigt, heißt **Variationsrechnung**.

## 2.2 Variationsrechnung, Euler-Lagrange-Gleichungen

- Aufgabenstellung: Finde Trajektorie  $\mathbf{r}(t)$  mit  $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_i$  und  $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f$ , die Wirkung  $S$  (Gleichung (80)) extremal macht.
- Berechne dazu Veränderung  $\delta S$  bei Variation  $\delta \mathbf{r}$ , wobei  $\mathbf{r}$  an den Randpunkten  $t_i$  und  $t_f$  festgehalten wird, d.h.  $\delta \mathbf{r}(t_i) = \delta \mathbf{r}(t_f) = 0$ :

$$\delta S = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\mathbf{r}} + \delta \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) - \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) \tag{90}$$

( $\delta \dot{\mathbf{r}} = (d/dt)\delta \mathbf{r}$ , d.h.  $\delta \dot{\mathbf{r}}$  und  $\delta \mathbf{r}$  nicht unabhängig).

- Es gilt

$$L(\dot{\mathbf{r}} + \delta \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) = L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) + \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \delta \dot{r}^j + \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial r^j} \delta r^j \tag{91}$$

(siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2021/22], Abschnitt 5.2).

- Damit

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \delta \dot{r}^j + \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial r^j} \delta r^j \right) = \\ &= \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \delta r^j \right)}_{= \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \delta r^j \Big|_{t=t_i}^{t=t_f} = 0} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left( - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} + \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial r^j} \right) \delta r^j \end{aligned}$$

(zunächst partielle Integration, dann Einsetzen von  $\delta r^j(t_i) = \delta r^j(t_f) = 0$ ).

\*\*\*\*\* 17. Mai 2022 (10. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Da  $\delta S = 0$  für beliebige  $\delta \mathbf{r}$  gelten soll, folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^j} - \frac{\partial L}{\partial r^j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (92)$$

(d.h. eine DGl für jede Raumdimension), die sogenannten **Euler-Lagrange-Gleichungen** (im mathematischen Kontext) oder **Lagrange-Gleichungen** bzw. **Lagrangesche BGLs** (im physikalischen Kontext).

- $L = T - V$  mit

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \quad , \quad V = V(\mathbf{r}) \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

(es ergeben sich Newtonsche BGLs in 3 Raumdimensionen, d.h. Prinzip der kleinsten Wirkung mit  $L = T - V$  ist äquivalent zu Newtonschen BGLs [falls Potential existiert, also Kräfte konservativ sind]).

## 2.3 Generalisierte Koordinaten

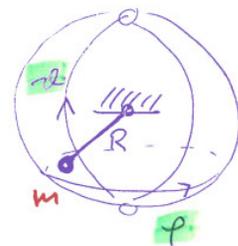
- Betrachte im Folgenden ein System von  $N$  Massenpunkten (Massen  $m_j$ , kartesische Koordinaten  $\mathbf{r}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ).
- Häufig liegen  $\tilde{N}$  **Zwangsbedingungen** vor, z.B.

- **Pendel** ( $N = 1$ ,  $\tilde{N} = 1$ ):  $\mathbf{r}^2 = R^2$ ;
- **ebenes Pendel** ( $N = 1$ ,  $\tilde{N} = 2$ ):  $\mathbf{r}^2 = R^2$ ,  $y = 0$ ;
- **Doppelpendel** ( $N = 2$ ,  $\tilde{N} = 2$ ):  $\mathbf{r}_1^2 = R_1^2$ ,  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = R_2^2$ ;

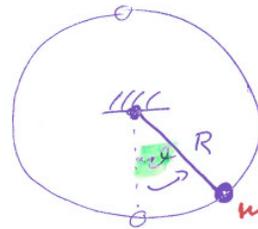
- **Bewegung auf Schraubenlinie** ("gleitende Perle auf entsprechend gebogenem Draht";  $N = 1, \tilde{N} = 2$ ):  $x^2 + y^2 = R^2, z = \dots$  (hier sind die Zwangsbedingungen in kartesischen Koordinaten nicht einfach zu formulieren).

Bild - 019

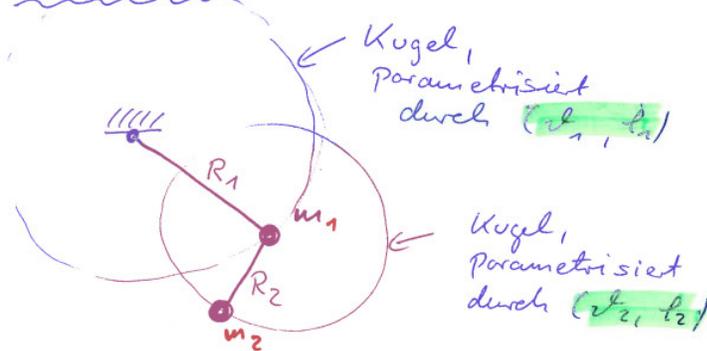
Pendel



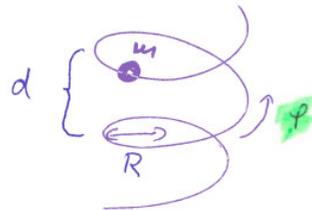
Ebenes Pendel



Doppelpendel



Schraubenlinie



- Lösen der Newtonschen BGLs in kartesischen Koordinaten bei vorliegenden Zwangsbedingungen i.d.R. schwierig.
- Zweckmäßig ist Übergang zu  $f = 3N - \tilde{N}$  **generalisierten Koordinaten**  $q^1, \dots, q^f$ , definiert durch

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q^1, \dots, q^f) \quad , \quad j = 1, \dots, N, \quad (94)$$

die Positionen der Massenpunkte vollständig beschreiben und gleichzeitig sicherstellen, dass Zwangsbedingungen erfüllt sind ( $f$  ist Anzahl der **Freiheitsgrade** des Systems).

- Mögliche generalisierte Koordinaten für obige Beispiele:

– **Pendel** ( $f = 2$ ),  $(q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi)$ :

$$x = R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \quad , \quad y = R \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \quad , \quad z = -R \cos(\vartheta) \quad (95)$$

(Kugelkoordinaten mit  $r = R = \text{const}$ ; Pendelbewegung entspricht Bewegung auf Kugeloberfläche).

– **Ebenes Pendel** ( $f = 1$ ),  $q^1 = \vartheta$ :

$$x = R \sin(\vartheta) \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = -R \cos(\vartheta) \quad (96)$$

(Polarkoordinaten mit  $r = R = \text{const}$ ; ebene Pendelbewegung entspricht Bewegung auf Kreislinie).

– **Doppelpendel** ( $f = 4$ ),  $(q^1, \dots, q^4) = (\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \sin(\vartheta_1) \cos(\varphi_1) \\ y_1 &= R_1 \sin(\vartheta_1) \sin(\varphi_1) \\ z_1 &= -R_1 \cos(\vartheta_1) \\ x_2 &= x_1(\vartheta_1, \varphi_1) + R_2 \sin(\vartheta_2) \cos(\varphi_2) \\ y_2 &= y_1(\vartheta_1, \varphi_1) + R_2 \sin(\vartheta_2) \sin(\varphi_2) \\ z_2 &= z_1(\vartheta_1, \varphi_1) - R_2 \cos(\vartheta_2). \end{aligned} \quad (97)$$

– **Bewegung auf Schraubenlinie** ( $f = 1$ ),  $q^1 = \varphi$ :

$$x = R \cos(\varphi) \quad , \quad y = R \sin(\varphi) \quad , \quad z = \frac{\varphi}{2\pi} d. \quad (98)$$

- Wahl generalisierter Koordinaten nicht eindeutig; z.B. könnte man in (95) an Stelle von  $z = -R \cos(\vartheta)$  auch  $z = +R \cos(\vartheta)$  wählen oder (falls Bewegung nur auf unterer Halbkugel stattfindet) statt Kugelkoordinaten  $(q^1, q^2) = (x, y)$  mit

$$x = x \quad , \quad y = y \quad , \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (99)$$

- Physikalische Ergebnisse unabhängig von Wahl generalisierter Koordinaten, Lösung der zugehörigen BGLs (siehe Abschnitt 2.4) bei geschickter Koordinatenwahl oft sehr einfach.
- Die in “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (WiSe 2021/22), Kapitel 7 eingeführten krummlinigen Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten können ebenfalls als generalisierte Koordinaten betrachtet werden (dann  $\tilde{N} = 0$  und  $f = 2N$  [Polarkoordinaten] bzw.  $f = 3N$  [Zylinder- und Kugelkoordinaten]).

## 2.4 Euler-Lagrange-Gleichungen für generalisierte Koordinaten

- Bei Lösung des Variationsproblems in Abschnitt 2.2 (Minimierung des Wirkungsfunktions, Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen) wurde nicht benutzt, dass  $\mathbf{r} = r^j =$

$(x, y, z)$ , also  $\mathbf{r}$  drei kartesische Koordinaten beschreibt; (92) gilt für beliebige Anzahl und Art von Koordinaten  $r^j \rightarrow q^j, j = 1, \dots, f$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0, \quad j = 1, \dots, f. \quad (100)$$

- Nach Wahl geeigneter generalisierter Koordinaten  $q^j$  und Ausdrücken der Lagrange-Funktion  $L = T - V$  durch  $\dot{q}^j$  und  $q^j$ , können BGLs (in die existierende Zwangsbedingungen bereits integriert sind) in nahezu trivialer Weise gewonnen werden (einfaches Ableiten gemäß (100)).

- Beispiele:

– **Bewegung in 1 Raumdimension,  $q^1 = x$ ,**

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad V = V(x) \quad \rightarrow \quad L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \\ \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (101)$$

(wie erwartet ergibt sich Newtonsche BGL in 1 Raumdimension).

\*\*\*\*\* 20. Mai 2022 (11. Vorlesung) \*\*\*\*\*

– **Bewegung in 2 Raumdimensionen, Polarkoordinaten,  $(q^1, q^2) = (r, \varphi)$ ,**

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad V = V(r, \varphi) \quad \rightarrow \quad L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r, \varphi) \\ \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \\ \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} mr^2 \dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mr^2 \ddot{\varphi} + 2mrr\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (102)$$

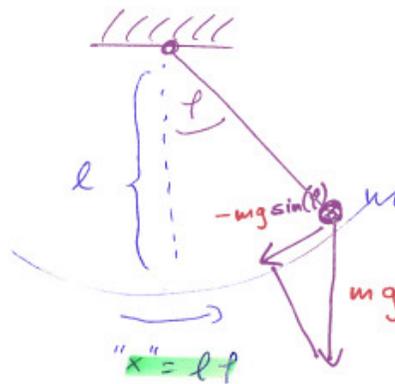
( $T$  in Polarkoordinaten: siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2021/22], Abschnitt 7.1).

– **Ebenes Pendel im homogenen Gravitationsfeld,  $q^1 = \vartheta$  (siehe Abschnitt 2.3),**

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} R^2 \dot{\vartheta}^2, \quad V = mgz = -mgR \cos(\vartheta) \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad L &= \frac{m}{2} R^2 \dot{\vartheta}^2 + mgR \cos(\vartheta) \\ \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= 0 \quad \rightarrow \quad mR^2 \ddot{\vartheta} + mgR \sin(\vartheta) = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \ddot{\vartheta} &= -\frac{g}{R} \sin(\vartheta). \end{aligned} \quad (103)$$

Bild - 015

"Newton'sche Überlegungen":



→ Newton'sche BGL:

$$m \ddot{x} = F$$

$$\rightarrow m l \ddot{\varphi} = -mg \sin(\varphi)$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi)$$

... o.k., konsistent mit  
Lagrange BGL.

- BGLs sind jeweils Systeme von  $f$  gewöhnlichen gekoppelten DGLs 2-ter Ordnung, genau wie Newton'sche BGLs, damit analoges Vorgehen beim Lösen:
  - (1) Allgemeine Lösung finden (muss  $2f$  frei wählbare unabhängige Konstanten enthalten).
  - (2) Unabhängige Konstanten so wählen, dass  $2f$  ABs erfüllt sind (diese sind durch Aufgabenstellung vorgegeben), z.B.  $q^j(t=0) = q_0^j$ ,  $\dot{q}^j(t=0) = \dot{q}_0^j$ ,  $j = 1, \dots, f$ .
- Vorteile des Lagrange-Formalismus gegenüber Newton'scher Formulierung der Mechanik:
  - Vergleichsweise einfaches Aufstellen von BGLs bei Zwangsbedingungen und/oder krummlinigen Koordinaten.
  - Lagrange-Formalismus sehr universell, z.B. auch für Feldtheorien wie Elektrodynamik oder QCD anwendbar.

Siehe auch Anfang von Kapitel 2.

## 2.5 Zusammenfassung und Beispiele

- Typisches Vorgehen bei Lösung von Mechanik-Problemen mit Lagrange-Formalismus:
  - (1) Geeignete generalisierte Koordinaten  $q^j$  wählen.
  - (2) Kinetische Energie  $T$  durch generalisierte Koordinaten ausdrücken.
  - (3) Potentielle Energie  $V$  durch generalisierte Koordinaten ausdrücken.
  - (4) Lagrange-Funktion niederschreiben,  $L = T - V$ .
  - (5) BGLs über Euler-Lagrange-Gleichungen (100), d.h. durch Ableiten bestimmen.
  - (6) BGLs lösen (zunächst allgemeine Lösung, dann Anpassen der unbestimmten Konstanten an gegebene ABs).
  - (7) Lösungen checken und diskutieren (einfache und/oder bekannte Grenzfälle studieren, Kernaussagen der erhaltenen Lösungen in Worte fassen, etc.).

### 2.5.1 Massenpunkt auf rotierender Stange

- Stange rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in  $x$ - $y$ -Ebene um ihr Zentrum, Massenpunkt (Masse  $m$ ) gleitet auf dieser Stange.
- Generalisierte Koordinate  $q^1 = r$  (Abstand vom Zentrum der Stange/Rotation),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix} \\
 \rightarrow \dot{\mathbf{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{r} \cos(\omega t) - r\omega \sin(\omega t) \\ \dot{r} \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\
 \rightarrow L = T &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2).
 \end{aligned} \tag{104}$$

- BGL über Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - m\omega^2 r = 0 \rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r \tag{105}$$

(Interpretation:  $m\omega^2 r$  ist Zentrifugalkraft).

- Allgemeine Lösung:

$$r = Ae^{+\omega t} + Be^{-\omega t} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{r} = \left( Ae^{+\omega t} + Be^{-\omega t} \right) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{106}$$

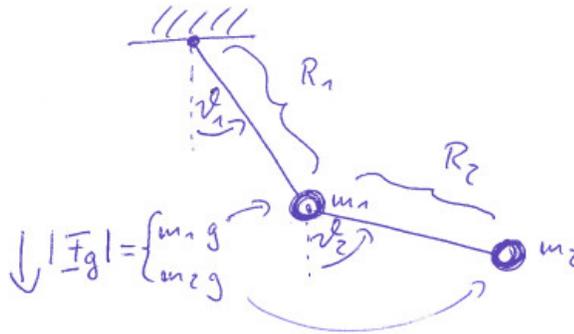
### 2.5.2 Ebenes Doppelpendel im homogenen Gravitationsfeld

- Generalisierte Koordinaten  $(q^1, q^2) = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ ,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} +R_1 \sin(\vartheta_1) \\ -R_1 \cos(\vartheta_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \begin{pmatrix} +R_2 \sin(\vartheta_2) \\ -R_2 \cos(\vartheta_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \dot{\mathbf{r}}_1 &= \begin{pmatrix} +R_1 \cos(\vartheta_1) \dot{\vartheta}_1 \\ +R_1 \sin(\vartheta_1) \dot{\vartheta}_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \begin{pmatrix} +R_2 \cos(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 \\ +R_2 \sin(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 \end{pmatrix} \\
\rightarrow L = T - V &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2 = \\
&= \frac{m_1}{2} R_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left( R_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + R_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2R_1 R_2 \underbrace{\left( \cos(\vartheta_1) \cos(\vartheta_2) + \sin(\vartheta_1) \sin(\vartheta_2) \right)}_{=\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \right) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \\
&\quad + m_1 g R_1 \cos(\vartheta_1) + m_2 g \left( R_1 \cos(\vartheta_1) + R_2 \cos(\vartheta_2) \right) = \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2} R_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{m_2}{2} R_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + m_2 R_1 R_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \\
&\quad + (m_1 + m_2) g R_1 \cos(\vartheta_1) + m_2 g R_2 \cos(\vartheta_2). \tag{107}
\end{aligned}$$

Bild 16



- BGls über Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_1} &= 0 \rightarrow \dots \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_2} &= 0 \rightarrow \dots \tag{108}
\end{aligned}$$

## 2.6 Bewegung in gekrümmten Räumen oder beschrieben durch krummlinige Koordinaten

- Betrachte 1 Massenpunkt, der sich in gekrümmtem Raum (typischer Weise auf gekrümmter Fläche, z.B. Kugelfläche) bewegt oder dessen Bewegung durch krummlinige Koordinaten (z.B. Kugelkoordinaten) beschrieben wird.
- Alles Folgende geradlinig auch auf mehrere Massenpunkte verallgemeinerbar.
- Kinetische Energie eines Massenpunkts in kartesischen Koordinaten:

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2. \tag{109}$$

- Kinetische Energie eines Massenpunkts in generalisierten Koordinaten:

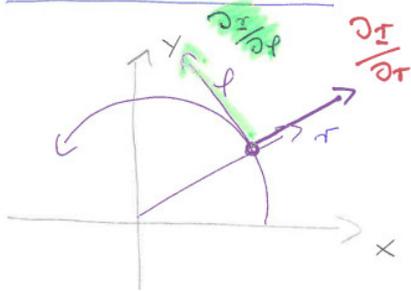
$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \dot{q}^j \right)^2 = \frac{m}{2} \dot{q}^j \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} \right)}_{=g_{jk}} \dot{q}^k = \frac{m}{2} \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k \quad (110)$$

( $\mathbf{r}$  ist Funktion von  $q^1, \dots, q^f$  gemäß (94));  $g_{jk}$  wird als **metrischer Tensor** bzw. **Metrik** bezeichnet.

- Vektoren  $\partial \mathbf{r} / \partial q^j$  zeigen entlang der Koordinatenlinien von  $q^j$ , sind Tangenten an die gekrümmte Fläche/den gekrümmten Raum.
- Diagonalelement  $g_{jj}$ : Beschreibt die Verzerrung der generalisierten Koordinate  $q^j$  bezüglich der kartesischen Koordinaten, d.h. wird eine Einheit in der Koordinate  $q^j$  durchlaufen, entspricht dies  $\sqrt{g_{jj}}$  Einheiten in kartesischen Koordinaten.
- Off-Diagonalelement  $g_{jk}$ : Falls  $g_{jk} = 0$ , stehen  $q^j$ - und  $q^k$ -Koordinatenlinien senkrecht.
- Metrischer Tensor enthält somit Informationen über Abstände und Krümmung von generalisierten Koordinaten und des von ihnen parametrisierten (eventuell gekrümmten) Raums.

Bild 17

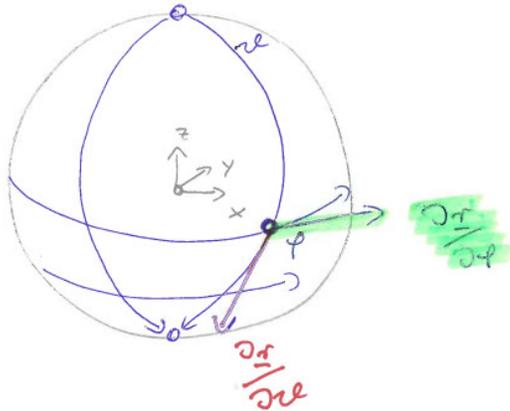
Polar Koordinaten



$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Kugel fläche (Radius R)

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ R \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ R \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$



- $g_{jk} = g_{kj}$ , d.h. symmetrisch bezüglich  $j \leftrightarrow k$ .

\*\*\*\*\* 24. Mai 2022 (12. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- **Linielement**  $ds^2$  ist infinitesimaler quadratischer Abstand; im 3-dimensionalen Euklidischen Raum in kartesischen Koordinaten

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\mathbf{r}^2. \quad (111)$$

- Linielement in generalisierten Koordinaten:

$$ds^2 = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j \right)^2 = dq^j g_{jk} dq^k, \quad (112)$$

d.h. der zu einem Satz generalisierter Koordinaten gehörige metrische Tensor erlaubt das Ausdrücken von Abständen durch diese Koordinaten.

- Anwendung: Länge einer Kurve beschrieben durch generalisierte Koordinaten,  $(q^1(\lambda), \dots, q^f(\lambda))$ ,  $\lambda_A \leq \lambda \leq \lambda_B$ ,

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{ds^2} = \int_A^B \sqrt{dq^j g_{jk} dq^k} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}}. \quad (113)$$

- Beispiel: Generalisierte Koordinaten  $(q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi)$ , die gemäß

$$x = R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \quad , \quad y = R \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \quad , \quad z = R \cos(\vartheta) \quad (114)$$

Kugelfläche mit Radius  $R$  parametrisieren.

- Metrischer Tensor:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = R \begin{pmatrix} + \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ + \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ - \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} - \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ + \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow g_{11} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = R^2$$

$$\rightarrow g_{22} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R^2 \sin^2(\vartheta)$$

$$\rightarrow g_{12} = g_{21} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\rightarrow g_{jk} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

- Kinetische Energie eines Massenpunkts:

$$T = \frac{m}{2} \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2). \quad (115)$$

- Linienelement:

$$ds^2 = dq^j g_{jk} dq^k = R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2). \quad (116)$$

- Betrachte Kurve, die um Äquator verläuft,  $(q^1(\lambda), q^2(\lambda)) = (\vartheta(\lambda), \varphi(\lambda)) = (\pi/2, \lambda)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ ; Länge der Kurve ist offensichtlich  $2\pi R$ , muss durch Verwendung von (113) und Rechnung reproduziert werden,

$$s = \int_0^{2\pi} d\lambda \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}} = \int_0^{2\pi} d\lambda \sqrt{g_{22}} = \int_0^{2\pi} d\lambda R = 2\pi R \quad (117)$$

... o.k.

- Es empfiehlt sich Standard-Metriken einmalig herzuleiten und auswendig zu lernen, z.B. für Polar-, Zylinder, und Kugelkoordinaten.
- Trivialer Spezialfall: Metrik des 3-dimensionalen Euklidischen Raums, kartesische Koordinaten  $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} = \mathbf{e}_j \quad , \quad g_{jk} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (118)$$

diese Metrik ist (bis auf umgekehrtes globales Vorzeichen) Teil der aus Kapitel 1 bekannten Minkowski-Metrik,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (119)$$

(rechte untere  $3 \times 3$ -Matrix).

\*\*\*\*\* 27. Mai 2022 (13. Vorlesung) \*\*\*\*\*

### 2.6.1 Parallelen zur Metrik und oberen und unteren Indizes in SRT

- Abschnitt ist als Ausblick zu verstehen; tieferes Verständnis durch Vorlesungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie (Physik) oder Differentialgeometrie (Mathematik).
- $\dot{q}^j$  und  $dq^j$  haben ähnlichen Stellenwert wie Vierervektoren in SRT (z.B.  $u^\mu$ ,  $dx^\mu$ ).
- Unter Koordinatentransformationen  $q^j \rightarrow q'^j = q'^j(q^1, \dots, q^f)$ , also Übergang von einem Satz generalisierter Koordinaten  $q^j$  zu anderem Satz generalisierter Koordinaten  $q'^j$ , transformieren sich  $\dot{q}^j$  und  $dq^j$  gemäß

$$\dot{q}'^j = \frac{dq'^j}{dt} = \underbrace{\frac{\partial q'^j}{\partial q^k}}_{=a^j_k} \frac{dq^k}{dt} = a^j_k \dot{q}^k \quad (120)$$

$$dq'^j = \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} dq^k = a^j_k dq^k; \quad (121)$$

dies ist ähnlich zu Lorentz-Transformationen von Vierervektoren in SRT, z.B.

$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$ ;  $a^j_k$  ist aber im Gegensatz zu  $\Lambda^\mu_\nu$  keine konstante "Matrix", sondern hängt im Allgemeinen von den generalisierten Koordinaten ab.

- Aus

$$\frac{\partial q^j}{\partial q'^k} \underbrace{\frac{\partial q'^k}{\partial q^l}}_{=a^k_l} = \frac{\partial q^j}{\partial q^l} = \delta_{jl} \quad (122)$$

folgt

$$(a^{-1})^j_k = \frac{\partial q^j}{\partial q'^k}. \quad (123)$$

- Während sich die Minkowski-Metrik unter Lorentz-Transformationen nicht verändert, transformiert sich die Metrik  $g_{jk}$  unter Koordinatentransformationen gemäß

$$g'_{jk} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q'^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q'^k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^m} \frac{\partial q^l}{\partial q'^j} \frac{\partial q^m}{\partial q'^k} = g_{lm} (a^{-1})^l_j (a^{-1})^m_k; \quad (124)$$

diese Gleichung ist das Analogon zur definierenden Eigenschaft von Lorentz-Transformationen (Gleichung (10)),

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \\ \rightarrow \eta_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta &= \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (125)$$

- Wie bei Vierervektoren in SRT (z.B.  $u^\mu$  und  $dx^\mu$ ) können bei  $\dot{q}^j$  und  $dq^j$  Indizes mit der Metrik nach unten gezogen werden (obere Indizes = kontravariant; untere Indizes = kovariant); dazu definiert man

$$\dot{q}_j = g_{jk} \dot{q}^k, \quad dq_j = g_{jk} dq^k. \quad (126)$$

- Wird über einen oberen und einen unteren Index summiert, ist die Summe invariant unter Koordinatentransformationen, z.B.

$$\dot{q}^j \dot{q}'_j = \dot{q}^j g'_{jk} \dot{q}'^k = \underbrace{(a^{-1})^r{}_j a^j{}_m}_{=\delta_{rm}} \underbrace{(a^{-1})^s{}_k a^k{}_n}_{=\delta_{sn}} \dot{q}^m g_{rs} \dot{q}'^n = \dot{q}^m g_{mn} \dot{q}'^n = \dot{q}^m \dot{q}'_m \quad (127)$$

und analog

$$ds'^2 = dq'^j dq'_j = dq'^j g'_{jk} dq'^k = \dots = dq^m g_{mn} dq^n = dq^m dq_m = ds^2; \quad (128)$$

die kinetische Energie sowie Abstände (beides physikalisch messbare Größen) sind damit unabhängig von gewählten generalisierten Koordinaten (wie man es erwartet bzw. es sein muss).

### 2.6.2 Kräftefreie Bewegung

- Gesucht: BGLs eines Massenpunkts, der sich ohne Einfluss von Kräften in gekrümmtem Raum (z.B. bei  $f = 2$  auf gekrümmter Fläche) bewegt.
- Lagrange Funktion:

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k. \quad (129)$$

- Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0 \quad (130)$$

liefern BGLs:

- Ableiten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} &= m g_{lk} \dot{q}^k \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} &= m \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} \dot{q}^m \dot{q}^k + m g_{lk} \ddot{q}^k \\ \frac{\partial L}{\partial q^l} &= \frac{m}{2} \dot{q}^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \dot{q}^k.\end{aligned}\quad (131)$$

- Definiere inverse Metrik  $g^{jk}$  via  $g^{jk}g_{kl} = \delta_{jl}$  (analog zu SRT,  $\eta^{\mu\nu}$  invers zu  $\eta_{\mu\nu}$ ), Multiplikation mit  $g^{jl}/m$ :

$$\begin{aligned}\frac{g^{jl}}{m}m g_{lk}\dot{q}^k &= \ddot{q}^j \\ \frac{g^{jl}}{m}m \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m}\dot{q}^m\dot{q}^k &= \frac{g^{jl}}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k}\right)\dot{q}^k\dot{q}^m \\ \frac{g^{jl}}{m}\frac{m}{2}\dot{q}^m\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l}\dot{q}^k &= \frac{g^{jl}}{2}\frac{\partial g_{km}}{\partial q^l}\dot{q}^k\dot{q}^m.\end{aligned}\quad (132)$$

- Insgesamt:

$$\ddot{q}^j = \underbrace{-\frac{g^{jl}}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial q^l}\right)}_{=\Gamma_{km}^j}\dot{q}^k\dot{q}^m = -\Gamma_{km}^j\dot{q}^k\dot{q}^m \quad (133)$$

( $\Gamma_{kl}^j = \Gamma_{lk}^j$ , d.h. symmetrisch in den beiden unteren Indizes, werden als **Christoffel-Symbole** bezeichnet).

- Triviales Beispiel: 2-dimensionaler Euklidischer Raum, kartesische Koordinaten  $(q^1, q^2) = (x, y)$ ,

$$\begin{aligned}g_{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \Gamma_{kl}^j &= 0 \\ \rightarrow \ddot{x} &= 0 \quad , \quad \ddot{y} = 0.\end{aligned}\quad (134)$$

\*\*\*\*\* 31. Mai 2022 (14. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Beispiel: 2-dimensionaler Euklidischer Raum, Polarkoordinaten  $(q^1, q^2) = (r, \varphi)$  gemäß  $\mathbf{r} = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \begin{pmatrix} +\cos(\varphi) \\ +\sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ +r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ \rightarrow g_{rr} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = 1 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r^2 \quad , \\ g_{r\varphi} &= g_{\varphi r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 0 \\ \rightarrow g_{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow g^{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \Gamma_{rr}^r &= 0 \quad , \quad \Gamma_{r\varphi}^r = \Gamma_{\varphi r}^r = 0 \quad , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{g^{rr}}{2}\left(-\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right) = -r \quad , \\ \Gamma_{rr}^\varphi &= 0 \quad , \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{g^{\varphi\varphi}}{2}\left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right) = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0 \\ \rightarrow \ddot{r} &= -\Gamma_{\varphi\varphi}^r\dot{\varphi}\dot{\varphi} = r\dot{\varphi}^2 \quad , \quad \ddot{\varphi} = -\Gamma_{r\varphi}^\varphi\dot{r}\dot{\varphi} - \Gamma_{\varphi r}^\varphi\dot{\varphi}\dot{r} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi};\end{aligned}\quad (135)$$

häufig ist das Aufstellen der BGs mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen jedoch einfacher, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \\
\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 \\
\rightarrow \ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 \\
\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt} mr^2\dot{\varphi} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\
\rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{136}$$

### 2.6.3 Geodätengleichung, ein weiteres Variationsproblem

- Gesucht: Kürzester Weg zwischen zwei Punkten  $q_A^j$  und  $q_B^j$  in einem durch Metrik  $g_{jk}$  beschriebenen gekrümmten Raum (z.B. bei  $f = 2$  auf gekrümmter Fläche). Man nennt diesen Weg **Geodäte**.
- Länge einer durch  $\lambda_A \leq \lambda \leq \lambda_B$  parametrisierten Kurve  $q^j(\lambda)$  von  $q^j(\lambda_A) = q_A^j$  nach  $q^j(\lambda_B) = q_B^j$  gegeben durch (113),

$$s[q] = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}}. \tag{137}$$

- Dieses Kurvenlängenfunktional hat gleiche Struktur, wie Wirkungsfunktional (80): Der Integrand hängt von Funktionen und deren ersten Ableitungen ab; definiert man

$$L(\dot{q}^j, q^j) = \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}}, \tag{138}$$

wobei  $\lambda$  mit  $t$  identifiziert wird, d.h.  $\dot{q}^j = dq^j/d\lambda$ , erhält man mit Euler-Lagrange-Gleichungen (100),

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0, \tag{139}$$

die Bestimmungsgleichungen für die Geodäte.

- Um die die Geodäte beschreibende Kurve  $q^j(\lambda)$  eindeutig festzulegen, muss eine Bedingung an deren Parametrisierung gestellt werden (Veränderung der Durchlaufgeschwindigkeit der Kurve verändert deren Form nicht); zweckmäßig ist Parametrisierung proportional zur Bogenlänge, d.h. konstante Durchlaufgeschwindigkeit, mathematisch beschrieben durch

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}} = \text{const (bezüglich } \lambda). \tag{140}$$

- Es folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} = \frac{1}{\sqrt{\dots}} g_{lk} \dot{q}^k$$

\*\*\*\*\* 03. Juni 2022 (15. Vorlesung) \*\*\*\*\*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} &= \frac{1}{\sqrt{\dots}} \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} \dot{q}^m \dot{q}^k + \frac{1}{\sqrt{\dots}} g_{lk} \ddot{q}^k \\ \frac{\partial L}{\partial q^l} &= \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \dot{q}^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \dot{q}^k; \end{aligned} \quad (141)$$

nach Umformung (im Wesentlichen Multiplikation mit  $\sqrt{\dots} g^{jl}$ ) und Zusammenfassung der Terme erhält man dieselben Gleichungen, wie für eine kräftefreie Bewegung,

$$\ddot{q}^j = -\frac{g^{jl}}{2} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial q^l} \right) \dot{q}^k \dot{q}^m = -\Gamma_{km}^j \dot{q}^k \dot{q}^m \quad (142)$$

(Gleichung (133); wird auch als **Geodätengleichung** bezeichnet).

- Bedingung an Parametrisierung (140) muss nicht als zusätzliche Gleichung behalten werden, da sie in (142) enthalten ist, wie folgende Rechnung zeigt:

- Bedingung (140):

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left( \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k \right) = 2\dot{q}^j g_{jk} \ddot{q}^k + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l. \quad (143)$$

- Geodätengleichung (142), Multiplikation mit  $2\dot{q}^n g_{nj}$ :

$$2\dot{q}^n g_{nj} \ddot{q}^j = -2\dot{q}^n g_{nj} \frac{g^{jl}}{2} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial q^l} \right) \dot{q}^k \dot{q}^m = -\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} \dot{q}^l \dot{q}^k \dot{q}^m, \quad (144)$$

also Linearkombination der Komponenten der Geodätengleichung identisch zu Bedingung (140) bzw. (143) (alle Indizes sind Summationsindizes, können umbenannt werden).

- Schlussfolgerungen:

- Teilchen, auf die keine Kräfte wirken, bewegen sich entlang von Geodäten.
- Aufgrund von  $ds/d\lambda = \text{const}$  (wird zu  $ds/dt = \text{const}$  bei kräftefreier Bewegung) ist dabei der Geschwindigkeitsbetrag konstant.

### 2.6.4 Abschließendes Beispiel: Bewegung auf Kegelfläche im homogenen Schwerfeld der Erde

- Generalisierte Koordinaten  $(q^1, q^2) = (r, \varphi)$ ,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ r \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ r \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} +\sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ +\sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ +\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ +r \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow g_{rr} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r^2 \sin^2(\alpha),$$

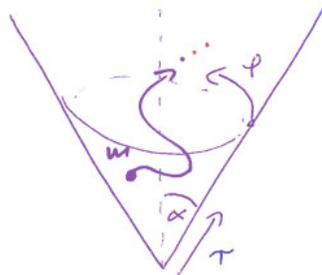
$$g_{r\varphi} = g_{\varphi r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\rightarrow g_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k - mgz = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2) - mgr \cos(\alpha).$$

(145)

Bild - 018



Teilchenbahn  
auf Kegelfläche

$$\downarrow |\underline{F}_g| = mg$$

- BGls über Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2 + mg \cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \ddot{r} = r \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2 - g \cos(\alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}) = 0$$

$$\rightarrow mr^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi} = m(x^2 + y^2) \dot{\varphi} = \text{const} \quad (\text{Erhaltung der } z\text{-Komponente des Drehimpulses})$$

(146)

(hängt  $L$  nur von  $\dot{q}^j$  aber nicht von  $q^j$  ab, ist es zweckmäßig für zugehörige BGl die Ableitung  $d/dt$  nicht auszuführen; man hat so unmittelbar eine Erhaltungsgröße identifiziert und die BGl ist nur von 1-ter Ordnung, nicht von 2-ter Ordnung [mehr dazu im folgenden Kapitel]).

## 2.7 Erhaltungsgrößen, Symmetrien, Noether-Theorem

### 2.7.1 Zyklische Variablen und Erhaltungsgrößen

- Hängt Lagrange-Funktion nur von  $\dot{q}^j$ , nicht aber von  $q^j$  ab, d.h.  $\partial L/\partial q^j = 0$ , bezeichnet man  $q^j$  als **zyklische Variable**.
- Mit zyklischer Variable  $q^j$  ist stets in offensichtlicher Weise eine Erhaltungsgröße  $I$  verbunden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^j}}_{=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = 0, \quad (147)$$

d.h.

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = \text{const} \quad (148)$$

(z.B. ist  $\varphi$  in Abschnitt 2.6.4 zyklische Variable, zugehörige Erhaltungsgröße ist  $I = mr^2\dot{\varphi} = \text{const} = l_z$ ).

- (148) (eine DGl 1. Ordnung) ersetzt die Euler-Lagrange-Gleichung (147) (eine DGl 2. Ordnung), d.h. i.d.R. nicht hilfreich, Zeitableitung in Gleichungen wie (147) auszuführen.
- Beispiel: Freies Teilchen in 1 Raumdimension,  $L = T - V = (m/2)\dot{x}^2$ .

- $L$  hängt nicht von  $x$  ab  
→  $x$  ist zyklische Variable.
- Zugehörige Erhaltungsgröße:  $I = \partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x} = \text{const} = p$  (Impulserhaltung).
- Verwende nicht Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{=0} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} = 0 \quad (149)$$

(DGl 2. Ordnung), sondern  $m\dot{x} = \text{const} = p$  (DGl 1. Ordnung) als BGl, d.h. um Trajektorie zu bestimmen.

- Beispiel: Teilchen in 2 Raumdimensionen in rotationssymmetrischem Potential, Polarkoordinaten,  $L = T - V = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$ .
  - $L$  hängt nicht von  $\varphi$  ab  
→  $\varphi$  ist zyklische Variable.

- Zugehörige Erhaltungsgröße:  $I = \partial L / \partial \dot{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}$  ( $I$  entspricht dem Drehimpuls  $l$ ).
- Verwende nicht Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = \frac{d}{dt} mr^2 \dot{\varphi} = mr^2 \ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (150)$$

(DGl 2. Ordnung), sondern  $mr^2 \dot{\varphi} = \text{const} = l$  (DGl 1. Ordnung) als eine der beiden BGLs, d.h. um Trajektorie zu bestimmen.

\*\*\*\*\* 07. Juni 2022 (16. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## 2.7.2 Noether-Theorem

- Grundidee:
  - Symmetrien bei vorliegender Lagrange-Funktion oft leicht zu sehen:
    - \* Z.B. **Translationssymmetrie**,  
 $L = (m/2)\dot{\mathbf{r}}^2$  unverändert bei  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$   
 $(\mathbf{r}_0$  beliebiger zeitunabhängiger Vektor).
    - \* Z.B. **Rotationssymmetrie**,  
 $L = (m/2)\dot{\mathbf{r}}^2 - V(|\mathbf{r}|)$  unverändert bei  $\mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r}$   
 $(R$  beliebige zeitunabhängige Rotationsmatrix).
  - Erhaltungsgrößen meist sehr viel schwieriger zu identifizieren (sind aber sehr hilfreich und wichtig: Vereinfachen/Lösen der BGLs, Quantisieren einer Theorie, etc.).
  - Symmetrien und Erhaltungsgrößen hängen eng zusammen: Jeder (kontinuierlichen) Symmetrie ist eine Erhaltungsgröße zugeordnet (zahlreiche Beispiel in “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden”).
  - **Noether-Theorem**: Eine Formel, die es bei vorliegender Symmetrie erlaubt, die zugehörige Erhaltungsgröße durch einfaches Ableiten auszurechnen.

- Gegeben:

- Lagrange-Funktion  $L(\dot{q}^j, q^j, t)$ .
- Transformation der generalisierten Koordinaten:  $q^j(t) \rightarrow q^j(s, t)$  mit  $q^j(0, t) = q^j(t)$ , d.h.  $s$  ist Parameter der Transformation (z.B. Drehwinkel bei Rotation kartesischer Koordinaten,

$$\begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(s) & -\sin(s) \\ +\sin(s) & +\cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (151)$$

- Verwende im Folgenden übersichtlichere Notation  $q^j(s) \equiv q^j(s, t)$  und  $q^j \equiv q^j(t)$ .

- Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial \dot{q}^k(s)} \frac{\partial \dot{q}^k(s)}{\partial s} + \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial q^k(s)} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} = \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial \dot{q}^k(s)} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \right) \\
&\quad - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial \dot{q}^k(s)} \right) \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} + \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial q^k(s)} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s}
\end{aligned} \tag{152}$$

( $\partial/\partial s$  bedeutet Ableitung nach  $s$ , wobei  $t$  festgehalten wird) sowie

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) \Big|_{s=0} = \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \\
&\quad - \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial q^k} \right)}_{=0 \text{ (Euler-Lagrange-Gleichungen)}} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right).
\end{aligned} \tag{153}$$

- Kann  $\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)/\partial s|_{s=0}$  als Zeitableitung geschrieben werden, d.h. gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} K(t), \tag{154}$$

folgt eine Erhaltungsgröße,

$$I = \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} - K(t) = \text{const} \tag{155}$$

(diese Gleichung wird als **Noether-Theorem** bezeichnet).

- Lässt die Transformation  $L$  invariant, das heißt

$$L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) = L(\dot{q}^j, q^j, t) \tag{156}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) = 0, \tag{157}$$

folgt  $K(t) = \text{const}$  und damit die Erhaltungsgröße,

$$I = \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \text{const} \tag{158}$$

(eine häufig anwendbare spezielle Variante des Noether-Theorems).

### Beispiel: Impulserhaltung beim freien Teilchen

- Lagrange-Funktion:

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2. \quad (159)$$

- Transformation:  $x \rightarrow x(s) = x + s$  (**Translation im Raum**).
- Es folgt  $\dot{x}(s) = \dot{x}$  und damit  $L(\dot{x}(s), x(s), t) = L(\dot{x}, x, t)$ , d.h. Transformation lässt  $L$  invariant.
- Erhaltungsgröße:

$$I = \left. \frac{\partial L(\dot{x}, x, t)}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(s)}{\partial s} \right|_{s=0} = m\dot{x} = \text{const} = p \quad (160)$$

(aus Translationsinvarianz im Raum folgt Impulserhaltung).

### Beispiel: Drehimpulserhaltung beim freien Teilchen

- Lagrange-Funktion:

$$L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (161)$$

- Transformation:  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(s) = \mathcal{R}_z(s)\mathbf{r}$  bzw.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ +\sin(s) & +\cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (162)$$

(**Rotation um  $z$ -Achse**).

- Es folgt

$$\dot{\mathbf{r}}^2(s) = \dot{\mathbf{r}}^T \underbrace{\mathcal{R}_z^T(s)\mathcal{R}_z(s)}_{=1} \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (163)$$

und damit  $L(\dot{\mathbf{r}}(s), \mathbf{r}(s), t) = L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$ , d.h. Transformation lässt  $L$  invariant.

- Erhaltungsgröße:

$$I = \left. \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \frac{\partial r^j(s)}{\partial s} \right|_{s=0} = -m\dot{x}y + m\dot{y}x = m(xy - y\dot{x}) = \text{const} = l_3 \quad (164)$$

(aus Rotationsinvarianz bezüglich der  $z$ -Achse folgt Erhaltung der  $z$ -Komponente des Drehimpulses).

- $x$ -Komponente und  $y$ -Komponente des Drehimpulses analog.

\*\*\*\*\* 10. Juni 2022 (17. Vorlesung) \*\*\*\*\*

## Energieerhaltung aus dem Noether-Theorem

- Voraussetzung: Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig,

$$L(\dot{q}^j, q^j, t) = L(\dot{q}^j, q^j). \quad (165)$$

- Transformation:  $q^j(t) \rightarrow q^j(s, t) = q^j(s + t)$  (**Translation in der Zeit**).
- Transformation lässt  $L$  nicht invariant, d.h. im Allgemeinen  $L(\dot{q}^j(s, t), q^j(s, t)) \neq L(\dot{q}^j(t), q^j(t))$  und somit (158) nicht anwendbar.
- Es gilt jedoch

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s, t), q^j(s, t)) \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s + t), q^j(s + t)) \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} L(\dot{q}^j(t), q^j(t)); \quad (166)$$

es folgt  $K(t) = L(\dot{q}^j(t), q^j(t))$  und damit die Erhaltungsgröße

$$I = \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j)}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L(\dot{q}^j, q^j) = \text{const} = E. \quad (167)$$

- Interpretation von  $I$  als Energie, da z.B.

$$\begin{aligned} L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \\ \rightarrow I &= \underbrace{\frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})}{\partial \dot{r}^j}}_{\underbrace{m\dot{r}^j}_{m\dot{\mathbf{r}}^2}} \dot{r}^j - L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (168)$$

## Zusammenfassung wichtiger Symmetrien und zugehöriger Erhaltungsgrößen

- **Homogenität des Raumes** (Translationsinvarianz im Raum)  $\rightarrow$  Impulserhaltung.
- **Isotropie des Raumes** (Rotationsinvarianz)  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung.
- **Homogenität der Zeit** ( $L$  hängt nicht explizit von der Zeit ab)  $\rightarrow$  Energieerhaltung.

### 3 Hamilton-Formalismus

- Alternative Formulierung der Mechanik.
- Keine praktischen Vorteile bei Lösung von Problemen (verwende dafür weiterhin Lagrange-Formalismus).
- Motivation:
  - Vorbereitender Schritt zur Quantisierung einer Theorie (d.h. Grundlage für Quantenmechanik): Kanonisch konjugierte Impulse, Hamilton-Funktion, Poisson-Klammern, ...
  - Wichtig auch in statistischer Physik: Phasenraum, Phasenraumvolumen, ...

#### 3.1 Legendre-Transformation

- Gegeben: Funktion  $f(x)$ .
- **Legendre-Transformation** von  $f$ :

(1) Ersetze Variable  $x$  durch Variable

$$y(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad (169)$$

d.h. verwende statt  $x$  die Steigung von  $f$  bei  $x$ .

(2) Ersetze Funktion  $f(x)$  durch Funktion

$$g(y) = yx(y) - f(x(y)) \quad (170)$$

\*  $x(y)$  erhält man durch Auflösen von (169) nach  $x$ ; Auflösbarkeit erfordert  $(d/dx)y(x) = d^2f/dx^2 > 0$  oder  $(d/dx)y(x) = d^2f/dx^2 < 0$ , d.h.  $f(x)$  muss entweder konvex oder konkav sein.

\*  $g$  nennt man **Legendre-Transformierte** von  $f$ .

- Die Legendre-Transformation ist ihre eigene Inverse, d.h. zweifache Legendre-Transformation entspricht der Identität:

$$z = \frac{dg}{dy} = \underbrace{\frac{dy}{dy}}_{=1} x + y \frac{dx}{dy} - \underbrace{\frac{df}{dx}}_{=y} \frac{dx}{dy} = x \quad (171)$$

$$h = \underbrace{z}_{=x} y - g = xy - (yx - f) = f. \quad (172)$$

- Besitzt eine Funktion mehrere Variablen, z.B.  $f(x_1, \dots, x_N)$ , kann man auch bezüglich einiger oder aller dieser Variablen Legendre-transformieren:

$$y_j = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_j} \quad (\rightarrow x_j(y_1, \dots, y_N)) \quad (173)$$

$$g(y_1, \dots, y_N) = \sum_{j=1}^N y_j x_j(y_1, \dots, y_N) - f(x_1(y_1, \dots, y_N), \dots, x_N(y_1, \dots, y_N)). \quad (174)$$

- Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion (zunächst in einer generalisierten Koordinate, d.h.  $L = L(\dot{q}, q, t)$ ) bezüglich der “generalisierten Geschwindigkeit”  $\dot{q}$ :

$$p = \frac{\partial L(\dot{q}, q, t)}{\partial \dot{q}} \quad (\rightarrow \dot{q}(p, q, t)) \quad (175)$$

$$H(p, q, t) = p\dot{q}(p, q, t) - L(\dot{q}(p, q, t), q, t). \quad (176)$$

- $p$  heißt **kanonisch konjugierter Impuls** zu  $q$  (auch **kanonischer Impuls, generalisierter Impuls**).
- $H$  heißt **Hamilton-Funktion**.
- Die Hamilton-Funktion ist eine Funktion des kanonisch konjugierten Impulses  $p$  und der generalisierten Koordinate  $q$ ; in ihr darf kein  $\dot{q}$  auftreten, d.h. alle  $\dot{q}$  müssen durch  $p$  und  $q$  ausgedrückt werden.

- Vergleiche Hamilton-Funktion (176) und Energieerhaltung aus Noether-Theorem (167)  $\rightarrow$  Hamilton-Funktion  $H$  entspricht (in vielen Fällen) der Energie.
- Verallgemeinerung auf mehrere generalisierte Koordinaten:

$$p_j = \frac{\partial L(\dot{q}^k, q^k, t)}{\partial \dot{q}^j} \quad (\rightarrow \dot{q}^j(p_k, q^k, t)) \quad (177)$$

$$H(p_k, q^k, t) = p_j \dot{q}^j(p_k, q^k, t) - L(\dot{q}^k(p_k, q^k, t), q^k, t) \quad (178)$$

( $p_j \dot{q}^j$  impliziert  $\sum_j$ ).

- Ergänzung zu Abschnitt 2.7.1: Falls  $q^j$  zyklische Variable, dann ist zugehöriger kanonisch konjugierter Impuls  $p_j = \partial L / \partial \dot{q}^j$  erhalten.
- Beispiel: Teilchen in 1 Raumdimension im Potential  $V$ :

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \quad (179)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m} \quad (180)$$

$$H(p, x, t) = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \left( \frac{p^2}{2m} - V(x) \right) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (181)$$

( $H$  entspricht Summe aus kinetischer und potentieller Energie; kanonisch konjugierter Impuls entspricht dem im letzten Semester eingeführten [kinetischen] Impuls).

\*\*\*\*\* 14. Juni 2022 (18. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Beispiel: Teilchen in 2 Raumdimensionen im Potential  $V$ , Polarkoordinaten:

$$L(\dot{r}, \dot{\varphi}, r, \varphi, t) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r, \varphi) \quad (182)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (183)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad (184)$$

$$\begin{aligned} H(p_r, p_\varphi, r, \varphi, t) &= p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \left( \frac{m}{2} \left( \frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4} \right) - V(r, \varphi) \right) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r, \varphi) \end{aligned} \quad (185)$$

( $H$  entspricht Summe aus kinetischer und potentieller Energie; kanonisch konjugierter Impuls zu  $\varphi$  entspricht nicht dem [kinetischen] Impuls, sondern dem Drehimpuls, d.h.  $p_\varphi = l = mr^2 \dot{\varphi}$ ).

### 3.2 Hamiltonsche BGLs

- **Hamiltonsche BGLs**

$$\dot{q}^j = + \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , \quad \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q^j} \quad (186)$$

( $j = 1, \dots, f$ ;  $f$  ist Anzahl der generalisierten Koordinaten) liefern ein System von  $2f$  DGLs 1. Ordnung zur Bestimmung der physikalischen Bewegung, sind also äquivalent zu den Lagrangeschen BGLs.

- Hamiltonsche BGLs folgen aus den Lagrangeschen BGLs (und der Legendre-Transformation (177) und (178)):

$$+ \frac{\partial H}{\partial p_j} = + \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_j} \dot{q}^k}_{=\delta_{jk}} + p_k \underbrace{\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial p_j}}_{=p_k} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}}_{=p_k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial p_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}}_{=0} \frac{\partial q^k}{\partial p_j} = \dot{q}^j \quad (187)$$

$$- \frac{\partial H}{\partial q^j} = - \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial q^j} \dot{q}^k}_{=0} - p_k \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^j} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}}_{=p_k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^j} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^j}}_{=(d/dt)\partial L/\partial \dot{q}^j=(d/dt)p_j} = \dot{p}_j. \quad (188)$$

- Umgekehrt kann man zeigen, dass die Lagrangeschen BGLs aus den Hamiltonschen BGLs folgen.
- Fortsetzung obiges Beispiel: Teilchen in 1 Raumdimension im Potential  $V$ :

$$\begin{aligned} H(p, x, t) &= \frac{p^2}{2m} + V(x) \\ \rightarrow \dot{x} &= + \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (189)$$

(Kombination der beiden Hamiltonschen BGLs liefert  $m\ddot{x} = -\partial V/\partial x$ , die Newtonsche BGL).

- Fortsetzung obiges Beispiel: Teilchen in 2 Raumdimensionen im Potential  $V$ , Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 H(p_r, p_\varphi, r, \varphi, t) &= \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r, \varphi) \\
 \rightarrow \dot{r} &= + \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = - \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \\
 \rightarrow \dot{\varphi} &= + \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{p}_\varphi = - \frac{\partial H}{\partial \varphi} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi}
 \end{aligned} \tag{190}$$

(Kombination der vier Hamiltonschen BGLs liefert die bekannten BGLs (102)).

### 3.3 Poisson-Klammern

- Betrachte Zeitableitung einer Größe  $A(p_j, q^j, t)$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial p_j} \underbrace{\frac{dp_j}{dt}}_{=-\partial H/\partial q^j} + \frac{\partial A}{\partial q^j} \underbrace{\frac{dq^j}{dt}}_{=+\partial H/\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q^j} + \frac{\partial A}{\partial t} = \\
 &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t},
 \end{aligned} \tag{191}$$

wobei die **Poisson-Klammer**

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q^j} \tag{192}$$

definiert wurde.

- Eigenschaften der Poisson-Klammer:

– Antisymmetrie:

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (\text{damit } \{A, A\} = 0). \tag{193}$$

– Linearität:

$$\{a_1 A_1 + a_2 A_2, B\} = a_1 \{A_1, B\} + a_2 \{A_2, B\}, \tag{194}$$

wobei  $a_1$  und  $a_2$  Konstanten sind.

\*\*\*\*\* 17. Juni 2022 (19. Vorlesung) \*\*\*\*\*

– Produktregel:

$$\{A_1 A_2, B\} = \{A_1, B\} A_2 + A_1 \{A_2, B\}. \tag{195}$$

Damit kann man eine Poisson-Klammer mit beliebigen Potenzen von  $p_j$  und  $q^j$  auf elementare Poisson-Klammern zurückführen, z.B.

$$\{(q^1)^3, p_1\} = 3(q^1)^2 \{q^1, p_1\}, \tag{196}$$

wobei für elementare Poisson-Klammern

$$\{p_j, q^k\} = -\delta_{jk} \quad , \quad \{p_j, p_k\} = \{q^j, q^k\} = 0 \quad (197)$$

gilt.

- Hängt eine Größe  $A$  nicht explizit von der Zeit ab, d.h.  $A(p_j, q^j, t) = A(p_j, q^j)$  bzw.  $\partial A / \partial t = 0$ , und gilt  $\{A, H\} = 0$ , dann ist  $A$  eine Erhaltungsgröße (folgt aus (191)).  
→ Mit der Poisson-Klammer kann man testen, ob eine Größe eine Erhaltungsgröße ist.
- Spezialfall: Hängt  $H$  nicht explizit von der Zeit ab, d.h.  $H(p_j, q^j, t) = H(p_j, q^j)$ , dann ist  $H$  eine Erhaltungsgröße ( $\{H, H\} = 0$  gilt immer).  
→ “Hängt  $H$  nicht explizit von der Zeit ab, ist die Energie erhalten.”
- Beispiel: Nachweis, dass der Drehimpuls beim freien Teilchen erhalten ist:

– Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (198)$$

– Drehimpuls:  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

– Nachweis, dass  $z$ -Komponente des Drehimpulses erhalten ist:

$$\{l_z, H\} = \left\{ x p_y - y p_x, \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \right\} = \frac{1}{2m} \left( \underbrace{\{x, p_x^2\}}_{=2p_x} p_y - \underbrace{\{y, p_y^2\}}_{=2p_y} p_x \right) = 0. \quad (199)$$

–  $x$ -Komponente und  $y$ -Komponente des Drehimpulses analog.

- Die Hamiltonschen BGLs (186) können mit Hilfe der Poisson-Klammern formuliert werden:

$$\dot{q}^j = \{q^j, H\} \quad , \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}. \quad (200)$$

- Bezug zur Quantenmechanik (wird erst im 4. Semester in “Theoretische Physik 4 – Quantenmechanik” verständlich):
  - Ausgangspunkt einer Quantisierung ist i.d.R. die Hamilton-Funktion (178), die zum *Hamilton-Operator* wird.
  - (191) entspricht der *Heisenbergschen Bewegungsgleichung für Operatoren*.
  - Poissonklammer (192) entspricht dem *Kommutator zweier Operatoren* (Kommutatoren sind die wesentlichen Objekte der Quantenmechanik; durch Vorgabe geeigneter nicht-verschwindender Kommutatoren, z.B.  $[p, q] = -i\hbar$ , erhält man die theoretische Beschreibung quantenmechanischer Phänomene).
  - Elementare Poissonklammern (197) spiegeln *Unschärferelation von Ort und Impuls* wieder, d.h. Ort und Impuls kann nicht gleichzeitig beliebig genau festgelegt werden.

### 3.4 Phasenraum

- **Phasenraum:**

- Der  $2f$ -dimensionale Raum aller möglichen generalisierten Impulse und Koordinaten,  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1, \dots, p_f, q^1, \dots, q^f)$  eines betrachteten Systems.
- Entspricht dem Raum aller möglichen Zustände.

- **Phasenraumtrajektorien** markieren die zeitliche Entwicklung des Systems, d.h. wird ausgehend vom Zustand  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  durch die Dynamik des Systems der Zustand  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$  zu einem späteren Zeitpunkt erreicht, sind die Phasenraumpunkte  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  und  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$  durch eine Phasenraumtrajektorie verbunden.

- Beispiel: 1-dimensionaler HO.

- Phasenraum ist 2-dimensional,  $(p, q)$ .
- Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (201)$$

- Hamiltonsche BGLs:

$$\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q. \quad (202)$$

- Allgemeine Lösung der Hamiltonschen BGLs:

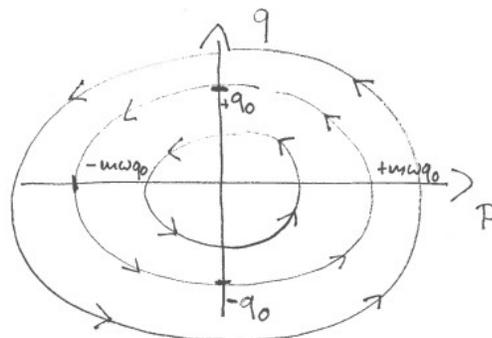
$$\ddot{q} = -\omega^2 q \rightarrow q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) \quad (203)$$

$$p(t) = m\dot{q} = m\omega(-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = -m\omega q_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t) \quad (204)$$

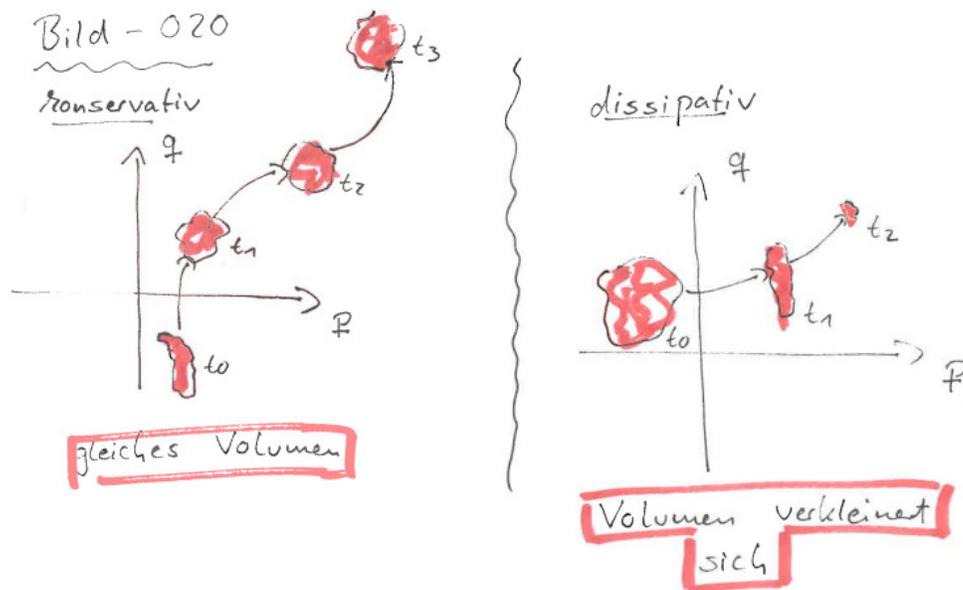
(im letzten Schritt jeweils Umbenennung  $A = q_0$  und  $m\omega B = p_0$ ).

- $(p(t), q(t))$  beschreibt Phasenraumtrajektorien, im Fall des 1-dimensionalen HOs Ellipsen in der  $p$ - $q$ -Ebene, z.B. für  $p_0 = 0$  ergibt sich  $(p(t), q(t)) = (-m\omega q_0 \sin(\omega t), q_0 \cos(\omega t))$ .

Bild - 019



- Phasenraumtrajektorien überkreuzen sich nicht (gäbe es Überkreuzungen, wäre die zeitliche Entwicklung des Systems nicht eindeutig von den BGLs festgelegt).
- Ein Phasenraumvolumen (z.B. eine Menge von Zuständen mit ähnlichen Orten und Impulsen  $\approx (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  beschrieben durch eine Kugel mit Mittelpunkt  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ )
  - ändert sich bei konservativen Systemen (Energieerhaltung) nicht mit der Zeit, ist also erhalten (**Satz von Liouville**, kann man einfach zeigen),
  - verkleinert sich bei dissipativen Systemen (keine Energieerhaltung, z.B. aufgrund von Reibungskräften) mit der Zeit, ist also nicht erhalten.



- Phasenraum vor allem wichtig in statistischer Physik, d.h. bei Berechnung von Erwartungswerten und Wahrscheinlichkeiten für Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden, z.B. Gase, Magnete, ... (Inhalt von "Theoretische Physik 5 – Thermodynamik und Statistische Physik"):
- In statistischer Physik muss man häufig Zustände zählen (z.B. Anzahl der Zustände unterhalb einer vorgegebenen Energie).
- Phasenraumvolumen ist proportional zur Anzahl der Zustände.
- In einer klassischen (= nicht-quantisierten) Theorie entspricht ein Zustand einem Punkt im Phasenraum, d.h. Zustände liegen unendlich dicht beieinander.
- In einer quantisierten Theorie nimmt ein Zustand ein endliches Volumen im Phasenraum ein, d.h. endliche Anzahl von Zuständen in endlichen Phasenraumvolumen.

## 4 Kleine Schwingungen von Vielteilchensystemen

- Grundlagen von Vielteilchensystemen: “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (WiSe 2021/22), Kapitel 6.
- Betrachte  $N$  Massenpunkte (Massen  $m_j$ ), deren Positionen  $\mathbf{r}_j$  durch  $f$  generalisierte Koordinaten  $\mathbf{Q} = (Q^1, \dots, Q^f)$  beschrieben werden, d.h.  $\mathbf{r}_j(\mathbf{Q})$ , im Potential  $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv V(\mathbf{Q})$ :

$$L = T - V = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{\mathbf{r}}_j^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \dot{Q}^k \underbrace{\sum_j m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial Q^k} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial Q^l}}_{=M_{kl}(\mathbf{Q})} \dot{Q}^l - V(\mathbf{Q}) \quad (205)$$

( $M_{kl}$  hat gleiche Struktur, wie Metrik aus Abschnitt 2.6, kann als eine Art Metrik des Gesamtsystems interpretiert werden).

- $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}$  ist Gleichgewichtslage, falls

$$\left. \frac{\partial}{\partial Q^j} V(\mathbf{Q}) \right|_{\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}} = 0. \quad (206)$$

- Gleichgewichtslage ist stabil, falls Hesse-Matrix

$$K_{jk}(\tilde{\mathbf{Q}}) = \left. \frac{\partial}{\partial Q^j} \frac{\partial}{\partial Q^k} V(\mathbf{Q}) \right|_{\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}} \quad (207)$$

positiv definit, d.h. falls  $\mathbf{q}K(\tilde{\mathbf{Q}})\mathbf{q} > 0$  für beliebige  $\mathbf{q} \neq 0$  gilt bzw. falls alle Eigenwerte von  $K(\tilde{\mathbf{Q}})$  positiv sind (geometrisch:  $V$  hat in jeder Richtung im  $f$ -dimensionalen Parameterraum positive Krümmung); andernfalls ist Gleichgewichtslage instabil.

- Ziel dieses Kapitels: Kleine Schwingungen um stabile Gleichgewichtslagen berechnen (häufig auftretendes Phänomen bzw. Problem, z.B. Molekülschwingungen, Ausbreitung von Wellen im Kristall, ...).

### 4.1 Quadratische Näherung der Lagrange-Funktion

- Im Folgenden  $2f$ -dimensionale Taylor-Näherung bis einschließlich 2. Ordnung in kleinen Auslenkungen aus stabiler Gleichgewichtslage  $q^j = Q^j - \tilde{Q}^j$  und den entsprechenden Geschwindigkeiten  $\dot{q}^j = \dot{Q}^j$  (Geschwindigkeiten sind proportional zu Auslenkungen bei kleinen und damit harmonischen Schwingungen [siehe HO, “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (WiSe 2021/22), Kapitel 4], damit  $q^j$  klein, wenn  $\dot{q}^j$  klein, und umgekehrt).

- Potential:

$$\begin{aligned}
 V &= \underbrace{V(\tilde{\mathbf{Q}})}_{\text{irrelevant}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial Q^j} V(\mathbf{Q}) \Big|_{\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}}}_{=0} q^j + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial Q^j} \frac{\partial}{\partial Q^k} V(\mathbf{Q}) \Big|_{\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}}}_{=K_{jk}(\tilde{\mathbf{Q}})} q^j q^k + \underbrace{\mathcal{O}(q^3)}_{\text{wird vernachlässigt}} \\
 \rightarrow V(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \mathbf{q} K(\tilde{\mathbf{Q}}) \mathbf{q}. \tag{208}
 \end{aligned}$$

- Konstante  $V(\tilde{\mathbf{Q}})$  physikalisch irrelevant, wird im Folgenden weggelassen.
- $q^3$ - und höhere Ordnungen werden vernachlässigt (gute Näherung für hinreichend kleine Schwingungen).
- Potential  $V = V(\mathbf{q})$  ist damit  $f$ -dimensionales Paraboloid, nach oben geöffnet, da  $K(\tilde{\mathbf{Q}})$  positiv definit (jede Auslenkung aus stabiler Gleichgewichtslage erhöht potentielle Energie).

- Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \dot{q}^j M_{jk}(\tilde{\mathbf{Q}}) \dot{q}^k + \underbrace{\mathcal{O}(q^3)}_{\text{wird vernachlässigt}} \\
 \rightarrow T(\dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} M(\tilde{\mathbf{Q}}) \dot{\mathbf{q}}. \tag{209}
 \end{aligned}$$

- $q^3$ - und höhere Ordnungen werden vernachlässigt (gute Näherung für hinreichend kleine Schwingungen).

- Insgesamt:

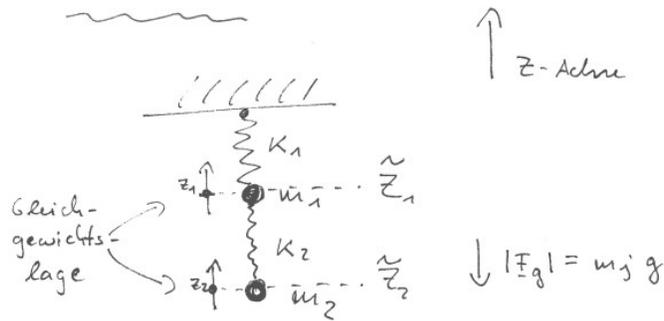
$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q} K \mathbf{q}. \tag{210}$$

- $M = M(\tilde{\mathbf{Q}})$  wird als **Massenmatrix** bezeichnet.
- $K = K(\tilde{\mathbf{Q}})$  wird als **Kraftmatrix** bezeichnet.

\*\*\*\*\* 24. Juni 2022 (21. Vorlesung) \*\*\*\*\*

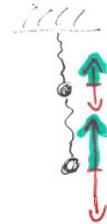
- Beispiel: Vertikale Bewegung von 2 Massenpunkten (Massen  $m_1$  und  $m_2$ , Positionen  $Z^1$  und  $Z^2$ ) im konstanten Schwerfeld, Massenpunkt 1 mit Feder 1 (Federkonstante  $\kappa_1$ ) aufgehängt, Massenpunkt 2 mit Feder 2 (Federkonstante  $\kappa_2$ ) mit Massenpunkt 1 verbunden.

Bild - 021



$z_1$  und  $z_2$   
beschreiben Auslenkungen  
aus Gleichgewichtslage

Eigenvektor  $\underline{a}_1$ :  $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ +2 \end{pmatrix}$   
 $\omega_1^2 = \frac{\kappa}{m}$



Eigenvektor  $\underline{a}_2$ :  $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$   
 $\omega_2^2 = 6 \frac{\kappa}{m}$



- Potential:

$$V(\mathbf{Z}) = m_1 g Z^1 + m_2 g Z^2 + \frac{1}{2} \kappa_1 (Z^1)^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 (Z^2 - Z^1)^2. \quad (211)$$

- Gleichgewichtslage:

$$\left. \frac{\partial}{\partial Z^1} V \right|_{\mathbf{z}=\tilde{\mathbf{z}}} = m_1 g + \kappa_1 \tilde{Z}^1 - \kappa_2 (\tilde{Z}^2 - \tilde{Z}^1) = 0 \quad (212)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial Z^2} V \right|_{\mathbf{z}=\tilde{\mathbf{z}}} = m_2 g + \kappa_2 (\tilde{Z}^2 - \tilde{Z}^1) = 0, \quad (213)$$

d.h.

$$\tilde{Z}^1 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{\kappa_1}, \quad \tilde{Z}^2 = \tilde{Z}^1 - \frac{m_2 g}{\kappa_2} = -\frac{(m_1 + m_2)g}{\kappa_1} - \frac{m_2 g}{\kappa_2}. \quad (214)$$

- Potential ausgedrückt durch Auslenkungen aus Gleichgewichtslage  $z^j = Z^j - \tilde{Z}^j$ :

$$V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \kappa_1 (z^1)^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 (z^2 - z^1)^2 \quad (215)$$

(irrelevante Konstante  $V(\tilde{\mathbf{Z}})$  weggelassen).

– Kinetische Energie:

$$T(\dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}m_1(\dot{z}^1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{z}^2)^2. \quad (216)$$

– Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{z}}M\dot{\mathbf{z}} - \frac{1}{2}\mathbf{z}K\mathbf{z} \quad (217)$$

mit Massen- und Kraftmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (218)$$

$$K = \underbrace{\begin{pmatrix} +\kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Feder 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} +\kappa_2 & -\kappa_2 \\ -\kappa_2 & +\kappa_2 \end{pmatrix}}_{\text{Feder 2}} = \begin{pmatrix} +\kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ -\kappa_2 & +\kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (219)$$

## 4.2 BGls und deren Lösung

- BGls aus Lagrange-Funktion (210) mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = M_{jk}\ddot{q}^k + K_{jk}q^k = 0 \quad (220)$$

bzw. kompakt in Matrix-Vektor-Form

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0. \quad (221)$$

- (221) ist System homogener linearer DGls mit konstanten Koeffizienten, kann daher durch Exponentialansatz gelöst werden (siehe auch “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2021/22], Abschnitt 3.6):

$$\mathbf{q} = \mathbf{a}_j e^{+i\omega_j t} \quad (222)$$

( $\mathbf{a}_j$  und  $\omega_j$  sind im Folgenden zu bestimmende Parameter des Ansatzes).

- Einsetzen des Exponentialansatzes in (221):

$$\left(-M\omega_j^2 + K\right)\mathbf{a}_j \underbrace{e^{+i\omega_j t}}_{\neq 0} = 0 \quad (223)$$

und damit

$$\left(-M\omega_j^2 + K\right)\mathbf{a}_j = 0 \quad (224)$$

((224) nennt man **verallgemeinertes Eigenwertproblem**: Lösungen sind Paare von Eigenwerten  $\omega_j^2$  und Eigenvektoren  $\mathbf{a}_j \neq 0$  [ $\mathbf{a}_j = 0$  ist uninteressante Lösung, daher ausgeschlossen]).

- Damit (224) Lösungen  $\mathbf{a}_j \neq 0$  hat muss  $\det(-M\omega_j^2 + K) = 0$  gelten:

- $\det(-M\omega_j^2 + K) = 0$  nennt man charakteristisches Polynom, ist ein Polynom  $f$ -ten Grades in  $\omega_j^2$ , hat damit  $f$  Nullstellen  $\omega_j^2$ , die gesuchten Eigenwerte bzw. **Eigenfrequenzen** (man kann zeigen, dass Eigenwerte  $\omega_j^2$  reell und  $\omega_j^2 > 0$ ).
- Zu jedem Eigenwert  $\omega_j^2$  kann durch Lösen von (224) ein Eigenvektor  $\mathbf{a}_j$  bestimmt werden (man kann zeigen, dass diese Eigenvektoren  $\mathbf{a}_j$  reell gewählt werden können; von reellen  $\mathbf{a}_j$  wird im Folgenden ausgegangen):
  - \* Systeme mit kleiner Anzahl von Freiheitsgraden  $f$ : Analytische Rechnungen möglich, Eigenvektoren z.B. über Gaußsches Eliminationsverfahren.
  - \* Systeme mit großer Anzahl von Freiheitsgraden  $f$ : Meist numerische Rechnungen mit speziellen Verfahren zur effizienten Lösung generalisierter Eigenwertprobleme erforderlich.

\*\*\*\*\* 28. Juni 2022 (22. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- $M$  und  $K$  symmetrisch, d.h.  $M = M^T$  und  $K = K^T$ ; aus (224) folgt damit  $0 = \mathbf{a}_j^T(-M\omega_j^2 + K)$  und daraus
 
$$0 = \mathbf{a}_j^T(-M\omega_j^2 + K)\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_j^T(-M\omega_j^2 + M\omega_k^2)\mathbf{a}_k = -(\omega_j^2 - \omega_k^2)\mathbf{a}_j^T M\mathbf{a}_k, \quad (225)$$

d.h. Eigenvektoren  $\mathbf{a}_j$  und  $\mathbf{a}_k$  zu verschiedenen Eigenwerten  $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$  sind bezüglich Massenmatrix  $M$  orthogonal, d.h.  $\mathbf{a}_j^T M\mathbf{a}_k = 0$ .

- Dementsprechend ist es zweckmäßig, Eigenvektoren gemäß
 
$$\mathbf{a}_j^T M\mathbf{a}_k = \delta_{jk} \quad (226)$$

zu normieren:

- \* Für Eigenvektoren  $\mathbf{a}_j$  und  $\mathbf{a}_k$  zu verschiedenen Eigenwerten  $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$  (226) automatisch erfüllt (wurde oben gezeigt).
- \* Für  $j = k$  kann Normierung durch Ersetzung  $\mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{a}_j / \sqrt{\mathbf{a}_j^T M\mathbf{a}_j}$  erreicht werden (ein Eigenvektor ist niemals eindeutig; nach Multiplikation mit beliebigen Faktor  $\neq 0$  handelt es sich noch immer um gleichwertigen Eigenvektor).
- \* Für Eigenvektoren  $\mathbf{a}_j$  und  $\mathbf{a}_k$  zu gleichen Eigenwerten  $\omega_j^2 = \omega_k^2$  (**entartete Eigenwerte**), ersetzt man  $\mathbf{a}_j$  und  $\mathbf{a}_k$  durch geeignete Linearkombinationen (diese sind noch immer Eigenvektoren), die (226) erfüllen (Details eventuell in Übungsaufgaben oder in Literatur).

- Allgemeine komplexe Lösung der BGLs (221):

$$\mathbf{q} = \sum_j \mathbf{a}_j (A_j e^{+i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t}) \quad (227)$$

( $\omega_j > 0$ , d.h. definiert als Wurzel aus  $\omega_j^2$ ) mit  $2f$  unabhängigen Konstanten  $A_j$  und  $B_j$ , die durch ABs festgelegt werden.

- Allgemeine reelle Lösung der BGLs (221) (die physikalische bedeutungsvolle Lösung): Nur Werte für  $A_j$  und  $B_j$  zulassen, die reelles  $\mathbf{q}$  garantieren, führt auf

$$\mathbf{q} = \sum_j \mathbf{a}_j \left( \tilde{A}_j \cos(\omega_j t) + \tilde{B}_j \sin(\omega_j t) \right) \quad (228)$$

(wobei  $\tilde{A}_j$  und  $\tilde{B}_j$  die unabhängigen Konstanten  $A_j$  und  $B_j$  ersetzen) oder

$$\mathbf{q} = \sum_j \mathbf{a}_j C_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \quad (229)$$

(wobei  $C_j$  und  $\varphi_j$  die unabhängigen Konstanten  $A_j$  und  $B_j$  ersetzen).

- ABs: Z.B. Vorgabe von  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t=0)$  und  $\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(t=0)$ , d.h. Auslenkungen und Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt  $t=0$ ; dann erhält man  $A_j$  und  $B_j$  zweckmäßig durch Multiplikation mit  $\mathbf{a}_k^T M$ ,

$$\mathbf{a}_k^T M \mathbf{q}_0 = \mathbf{a}_k^T M \sum_j \mathbf{a}_j \left( A_j e^{+i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t} \right) \Big|_{t=0} = A_k + B_k \quad (230)$$

$$\mathbf{a}_k^T M \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{a}_k^T M \sum_j \mathbf{a}_j \left( A_j (+i\omega_j) e^{+i\omega_j t} + B_j (-i\omega_j) e^{-i\omega_j t} \right) \Big|_{t=0} = i\omega_k (A_k - B_k), \quad (231)$$

d.h. für jedes  $k$  zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von  $A_k$  und  $B_k$  (Implementierung der ABs generiert automatisch reelles  $\mathbf{q}$ ).

\*\*\*\*\* 01. Juli 2022 (23. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Fortsetzung des Beispiels aus Abschnitt 4.1:

– Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \left( -M\omega_j^2 + K \right) = \det \begin{pmatrix} -m_1\omega_j^2 + \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ -\kappa_2 & -m_2\omega_j^2 + \kappa_2 \end{pmatrix} = \\ &= \left( -m_1\omega_j^2 + \kappa_1 + \kappa_2 \right) \left( -m_2\omega_j^2 + \kappa_2 \right) - \kappa_2^2. \end{aligned} \quad (232)$$

– Betrachte im Folgenden den Spezialfall  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\kappa_1/3 = \kappa_2/2 = \kappa$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \left( -m\omega_j^2 + 5\kappa \right) \left( -m\omega_j^2 + 2\kappa \right) - 4\kappa^2 = (m\omega_j^2)^2 - 7\kappa(m\omega_j^2) + 6\kappa^2 \\ \rightarrow \omega_{1,2}^2 &= \left( \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{7^2 - 4 \times 6}}{2} \right) \frac{\kappa}{m} = \left( \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} \right) \frac{\kappa}{m}, \end{aligned} \quad (233)$$

d.h.  $\omega_1^2 = \kappa/m$  und  $\omega_2^2 = 6\kappa/m$ .

– Eigenvektor zu  $\omega_1^2 = \kappa/m$ :

$$\begin{aligned} (-M\omega_1^2 + K)\mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} -m\omega_1^2 + 5\kappa & -2\kappa \\ -2\kappa & -m\omega_1^2 + 2\kappa \end{pmatrix} \mathbf{a}_1 = \\ &= \kappa \begin{pmatrix} +4 & -2 \\ -2 & +1 \end{pmatrix} \mathbf{a}_1 = 0, \end{aligned} \quad (234)$$

d.h.  $\mathbf{a}_1 = (+1, +2)$ , gleichgerichtete Schwingung der Massenpunkte (siehe Bild-021).

– Eigenvektor zu  $\omega_2^2 = 6\kappa/m$ :

$$\begin{aligned} (-M\omega_2^2 + K)\mathbf{a}_2 &= \begin{pmatrix} -m\omega_2^2 + 5\kappa & -2\kappa \\ -2\kappa & -m\omega_2^2 + 2\kappa \end{pmatrix} \mathbf{a}_2 = \\ &= \kappa \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{a}_2 = 0, \end{aligned} \quad (235)$$

d.h.  $\mathbf{a}_2 = (+2, -1)$ , entgegengerichtete Schwingung der Massenpunkte (siehe Bild-021).

– Nach Normierung gemäß (226):  $\mathbf{a}_1 = (+1, +2)/\sqrt{5m}$  und  $\mathbf{a}_2 = (+2, -1)/\sqrt{5m}$ .

– ABs bei  $t = 0$ : Massenpunkt 1 unausgelenkt in Ruhe, Massenpunkt 2 ausgelenkt um  $\Delta$  in Ruhe:

\*  $\mathbf{z}_0 = (0, \Delta)$ ,  $\dot{\mathbf{z}}_0 = (0, 0)$ .

\*  $\mathbf{a}_1^T M \mathbf{z}_0 = (+2/\sqrt{5m})m\Delta = +2\sqrt{m}\Delta/\sqrt{5} = A_1 + B_1$

$\mathbf{a}_1^T M \dot{\mathbf{z}}_0 = 0 = i\omega_1(A_1 - B_1)$

$\rightarrow A_1 = B_1 = +\sqrt{m}\Delta/\sqrt{5}$ .

\*  $\mathbf{a}_2^T M \mathbf{z}_0 = (-1/\sqrt{5m})m\Delta = -\sqrt{m}\Delta/\sqrt{5} = A_2 + B_2$

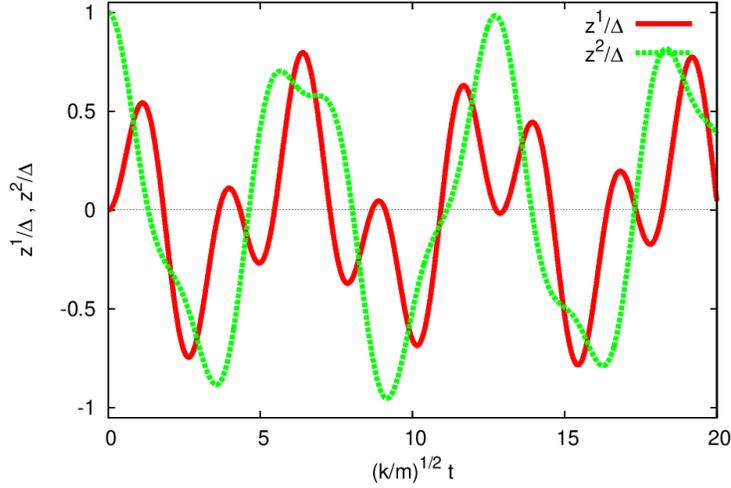
$\mathbf{a}_2^T M \dot{\mathbf{z}}_0 = 0 = i\omega_2(A_2 - B_2)$

$\rightarrow A_2 = B_2 = -\sqrt{m}\Delta/2\sqrt{5}$ .

\* Damit spezielle Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \sum_j \mathbf{a}_j (A_j e^{+i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t}) = \\ &= \frac{2}{5} \begin{pmatrix} +1 \\ +2 \end{pmatrix} \Delta \cos(\sqrt{\kappa/mt}) - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \end{pmatrix} \Delta \cos(\sqrt{6\kappa/mt}) \end{aligned} \quad (236)$$

(Überlagerung der beiden Schwingungen  $\propto \cos(\sqrt{\kappa/mt})$  und  $\propto \cos(\sqrt{6\kappa/mt})$  führt zu kompliziertem sich nicht wiederholendem Schwingungsverhalten).



### 4.3 Normalschwingungen und Normalkoordinaten

- Schwingt ein System so, dass nur einer der Eigenvektoren  $\mathbf{a}_j$  und damit nur eine der Eigenfrequenzen  $\omega_j$  zu  $\mathbf{q}$  beiträgt, d.h. nur für einen Index  $j = k$  die Konstanten  $A_k$  und  $B_k$  von Null verschieden sind (äquivalent  $\tilde{A}_k$  und  $\tilde{B}_k$  bzw.  $C_k$  von Null verschieden sind), spricht man von einer **Normalschwingung**.
- Normalschwingungen sind linear unabhängige Schwingungszustände, die zu einfachen sin- bzw. cos-förmigen Schwingungsverhalten mit Periode  $2\pi/\omega_j$  führen.
- Übergang zu **Normalkoordinaten**  $\vec{\xi}$  häufig zweckmäßig,

$$q^j = a_k^j \xi^k \quad (237)$$

(unterer Index  $k$  in  $a_k^j$  nummeriert Eigenvektoren  $\mathbf{a}_k$ , oberer Index  $j$  in  $a_k^j$  bezeichnet  $j$ -te Komponente des Eigenvektors  $\mathbf{a}_k$ ).

- (237) kann auch in Matrix-Vektor-Form geschrieben werden,

$$\mathbf{q} = A\vec{\xi}, \quad (238)$$

wobei Spalten der  $f \times f$ -Matrix  $A$  Eigenvektoren  $\mathbf{a}_k$  sind, d.h.  $A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_f)$ .

- Lagrange-Funktion in Normalkoordinaten:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}M\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}K\mathbf{q} = \frac{1}{2}\dot{\vec{\xi}}A^TMA\dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2}\vec{\xi}A^TKA\vec{\xi} = \sum_j \left( \frac{1}{2}(\dot{\xi}^j)^2 - \frac{\omega_j^2}{2}(\xi^j)^2 \right), \quad (239)$$

wobei

$$A^TMA = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_f^T \end{pmatrix} M(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_f) = \mathbb{1} \quad (240)$$

$$\begin{aligned}
A^T K A &= A^T K (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_f) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{a}_f^T \end{pmatrix} M(\mathbf{a}_1 \omega_1^2 \mathbf{a}_2 \omega_2^2 \dots \mathbf{a}_f \omega_f^2) = \\
&= \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_f^2)
\end{aligned} \tag{241}$$

verwendet wurde.

- $L$  hat Struktur einer Summe über unabhängige HOs, d.h.  $f$  unabhängige BGLs

$$\ddot{\xi}^j + \omega_j^2 \xi^j = 0, \tag{242}$$

deren Lösung sehr einfach ist (siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2021/22], Kapitel 4); Übergang zu Normalkoordinaten erfordert aber Kenntnis der Eigenvektoren  $\mathbf{a}_j$ , also insgesamt genauso schwierig, wie Lösung in ursprünglichen Koordinaten  $q^j$ .

- Hamilton-Funktion (d.h. Gesamtenergie)

$$H = \sum_j \left( \frac{1}{2} (\dot{\xi}^j)^2 + \frac{\omega_j^2}{2} (\xi^j)^2 \right) \tag{243}$$

hat ebenfalls Struktur einer Summe über unabhängige HOs, zeigt, dass die in den Normalschwingungen enthaltenen Energien zeitlich konstant sind, d.h. nicht untereinander ausgetauscht werden.

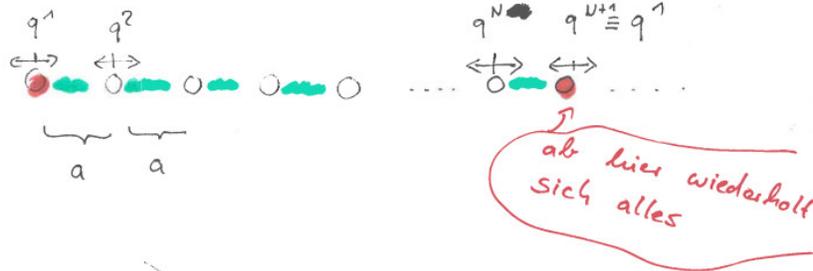
- Normalschwingungen erlauben einfache Quantisierung (wird erst im 4. Semester in “Theoretische Physik 4 – Quantenmechanik” verständlich).

\*\*\*\*\* 05. Juli 2022 (24. Vorlesung) \*\*\*\*\*

#### 4.4 Ausbreitung von Wellen im Kristall

- Betrachte einfaches Modell eines Festkörpers/Kristalls:
  - Nur 1 Raumdimension (leicht auf 2 oder 3 Raumdimensionen erweiterbar).
  - $N$  Atome/Moleküle (Masse  $m$ ), im energetischen Minimum, d.h. im Gleichgewicht in konstantem Abstand  $a$  aufgereiht ( $a$  hat Größenordnung des Atom-/Moleküldurchmessers).
  - Generalisierte Koordinaten  $q^j$ ,  $j = 1, \dots, N$  sind Auslenkungen aus dieser Gleichgewichtslage.
  - Kräfte nur zwischen Nachbaratomen/-molekülen, beschrieben durch Potentiale  $V(q^j - q^{j-1}) = (\kappa/2)(q^j - q^{j-1})^2 + \mathcal{O}((q^j - q^{j-1})^3)$  (bei kleinen Schwingungen der Atome/Moleküle  $\mathcal{O}((q^j - q^{j-1})^3)$  vernachlässigbar).
  - **Periodische Randbedingungen:**  $q^j \equiv q^{j+N}$ , d.h. Kristall hat keine Ränder, nach  $N$  Atomen/Molekülen wiederholen sich die Auslenkungen (erlaubt analytische Berechnung der Kristallschwingungen; bei numerischer Lösung auch beliebige andere, z.B. **offene Randbedingungen** möglich).

Bild - 022



$$M = \begin{pmatrix} m & & & 0 \\ & m & & \\ & & m & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \leftarrow N \times N \text{ - Matrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa & & 0 \\ -\kappa & \kappa & -\kappa & \\ & -\kappa & \kappa & -\kappa \\ & & -\kappa & \kappa & -\kappa \\ & & & -\kappa & \kappa \end{pmatrix}$$

jede nächste-Nachbar-WW gibt Beitrag

$$\begin{pmatrix} \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{pmatrix}$$

- Lagrange-Funktion:

$$L = \sum_{j=1}^N \left( \frac{m}{2} (\dot{q}^j)^2 - \frac{\kappa}{2} (q^j - q^{j-1})^2 \right) \quad (244)$$

( $q^0 \equiv q^N$  aufgrund periodischer Randbedingungen).

- BGLs:

$$M_{jk} \ddot{q}^k + K_{jk} q^k = 0 \quad (245)$$

mit Massen- und Kraftmatrix

$$M_{jk} = \delta_{jk} m, \quad K_{jk} = (-\delta_{jk-1} + 2\delta_{jk} - \delta_{jk+1}) \kappa. \quad (246)$$

- Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\left(-M_{jk}\omega_n^2 + K_{jk}\right)a_n^k = \left(-\delta_{jk-1}\kappa + \delta_{jk}(-m\omega_n^2 + 2\kappa) - \delta_{jk+1}\kappa\right)a_n^k = 0 \quad (247)$$

mit Ansatz

$$a_n^k = \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \quad (248)$$

(erfüllt periodische Randbedingungen  $q^k \equiv q^{k+N}$ , da  $q^k = \sum_n a_n^k (A_n e^{+i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t})$ ):

$$\begin{aligned} \left(-M_{jk}\omega_n^2 + K_{jk}\right)a_n^k &= \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i j n}{N}\right) \left(-\exp\left(+\frac{2\pi i n}{N}\right)\kappa + (-m\omega_n^2 + 2\kappa) - \exp\left(-\frac{2\pi i n}{N}\right)\kappa\right) = \\ &= \underbrace{\exp\left(\frac{2\pi i j n}{N}\right)}_{\neq 0} \left(-m\omega_n^2 + \left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right)\kappa\right) = 0 \\ \rightarrow \omega_n^2 &= \left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right)\frac{\kappa}{m}. \end{aligned} \quad (249)$$

- $\omega_0^2$  und  $\omega_{N/2}^2$  (bei geradem  $N$ ) treten nur einfach auf,  $\mathbf{a}_0$  und  $\mathbf{a}_{N/2}$  reell,

$$a_0^k = 1, \quad a_{N/2}^k = \cos(\pi k); \quad (250)$$

$\omega_n^2 = \omega_{N-n}^2$  für  $1 \leq n < N/2$ , d.h. entartet, zugehörige Eigenvektoren können durch Linearkombination reell gemacht werden,

$$\frac{1}{2}(a_n^k + a_{N-n}^k) = \cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right), \quad \frac{1}{2i}(a_n^k - a_{N-n}^k) = \sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right). \quad (251)$$

\*\*\*\*\* 08. Juli 2022 (25. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Zweckmäßiger ist Rechnen mit komplexen Eigenvektoren:

- Normierungsbedingung  $\mathbf{a}_j^T M \mathbf{a}_k = \delta_{jk}$  wird durch  $\mathbf{a}_j^\dagger M \mathbf{a}_k = \delta_{jk}$  ( $\dagger$  bedeutet transponiert und komplex konjugiert) ersetzt, d.h.

$$a_n^k = \frac{1}{\sqrt{Nm}} \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right). \quad (252)$$

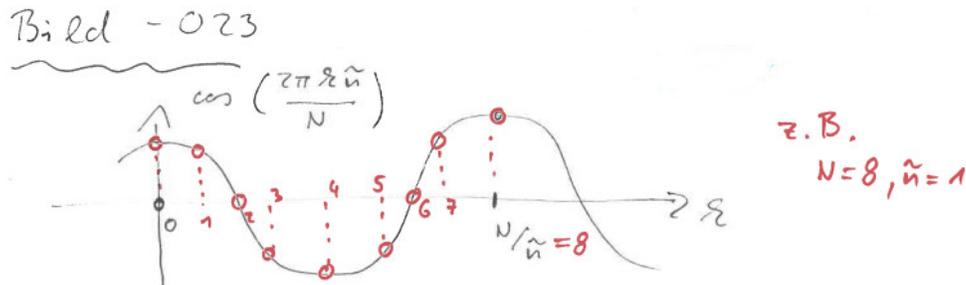
- Allgemeine komplexe Lösung der BGLs entspricht dann (227),

$$\begin{aligned} q^k &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n^k \left(A_n e^{+i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{Nm}} \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \left(A_n e^{+i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}\right). \end{aligned} \quad (253)$$

- Lösung beschreibt Wellen, z.B. nach rechts laufende cos-förmige Welle für reelles  $B_{\tilde{n}} = A_{N-\tilde{n}}$  für ein spezielles  $0 < \tilde{n} < N/2$ , alle anderen  $A_n = B_n = 0$ ,

$$q^k = \frac{2A_{N-\tilde{n}}}{\sqrt{Nm}} \cos\left(\frac{2\pi k\tilde{n}}{N} - \omega_{\tilde{n}}t\right) \quad (254)$$

(mit Welle ist in diesem Zusammenhang eine Funktion  $f(x \pm vt)$  gemeint, wobei  $x \equiv ka$ ; die von  $f$  vorgegebene Form bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v$  nach links [für  $x + vt$ ] oder nach rechts [für  $x - vt$ ]).



- Ausbreitungsgeschwindigkeit für  $\tilde{n} \ll N$  durch Vergleich der rechten Seite von (254) mit  $f(ka - v_{\tilde{n}}t)$ .

$$v_{\tilde{n}} = \frac{Na\omega_{\tilde{n}}}{2\pi\tilde{n}} \approx a\sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad (255)$$

wobei

$$\omega_{\tilde{n}} = \sqrt{\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi\tilde{n}}{N}\right)\right)\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\left(\left(\frac{2\pi\tilde{n}}{N}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{2\pi\tilde{n}}{N}\right)^4\right)\right)\frac{\kappa}{m}} \approx \frac{2\pi\tilde{n}}{N}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad (256)$$

verwendet wurde.

- ABs bei  $t = 0$ : Z.B. Auslenkung eines Atoms/Moleküls um  $\Delta$ .

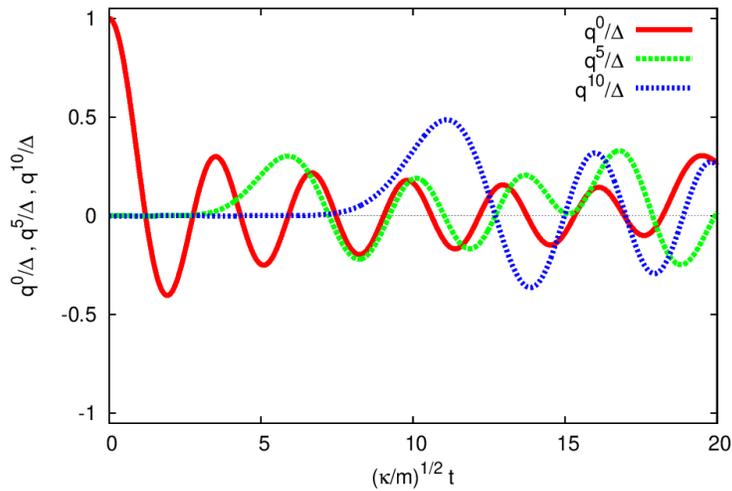
$$- \mathbf{q}_0 = (\Delta, 0, \dots, 0), \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \vec{0}$$

$$- \mathbf{a}_j^\dagger M \mathbf{q}_0 = (1/\sqrt{Nm})m\Delta = \sqrt{m}\Delta/\sqrt{N} = A_j + B_j$$

$$\mathbf{a}_j^\dagger M \dot{\mathbf{q}}_0 = 0 = i\omega_j(A_j + B_j)$$

$$\rightarrow A_j = B_j = \sqrt{m}\Delta/2\sqrt{N}$$

- Allgemeine Lösung wird dadurch zu spezieller Lösung, kann problemlos mit Hilfe eines Computers gezeichnet werden, im Folgenden für  $N = 20$ .



- Effekt der Auslenkung von Atom/Molekül 0 für Atom/Molekül 5 (Entfernung  $\approx 5a$ ) erst nach Zeitspanne  $t \approx 5/\sqrt{\kappa/m}$  sichtbar, für Atom/Molekül 10 (Entfernung  $\approx 10a$ ) erst nach Zeitspanne  $t \approx 10/\sqrt{\kappa/m}$  sichtbar; Ausbreitungsgeschwindigkeit (255) damit bestätigt.
- Phänomen der Ausbreitung von Wellen (z.B. Schallwellen) im Kristall damit qualitativ verstanden.

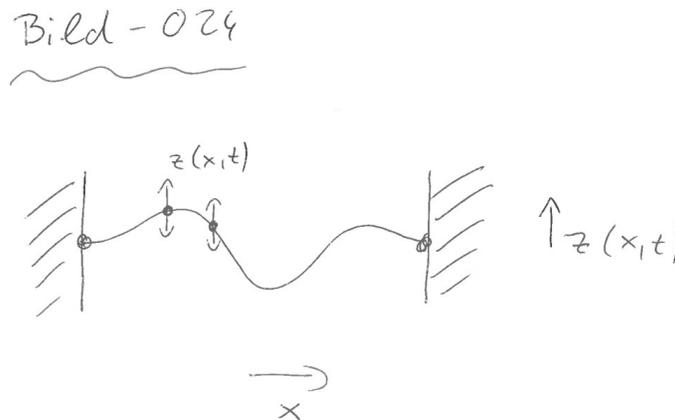
## 5 Grundlagen der Kontinuumsmechanik und von Feldtheorien

- **Kontinuumsmechanik:**

- Dynamik von deformierbaren Objekten, Flüssigkeiten und Gasen.
- Betrachte kontinuierliche Massenverteilungen statt Bahnen einzelner Massenpunkte (z.B.  $\mathbf{r}_j(t)$ ).
- Mathematisch beschrieben durch **Felder** (z.B.  $z(x, t)$  bzw.  $z(x, y, t)$  [transversale Auslenkung einer schwingenden Saite bzw. Membran] oder  $\rho(\mathbf{r}, t)$  [Massendichte einer Flüssigkeit oder eines Gases]), d.h. durch Funktionen die von Ort und Zeit, also von 2 oder mehr Variablen abhängen.
- Man spricht daher von **Feldtheorien**.

### 5.1 Schwingende Saite

- Betrachte in 2 Raumdimensionen eine in  $x$ -Richtung gespannte Saite, beschrieben durch  $z(x, t)$  ( $z$  ist transversale Auslenkung bei  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ ; longitudinale Auslenkungen werden nicht zugelassen).



- Einfaches Beispiel einer Feldtheorie:

- $z$  hängt nur von 2 Variablen  $x$  und  $t$  ab.
- Bedeutung von  $z$  offensichtlich.
- Deutlich komplizierteres Beispiel im nächsten Semester in “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik”: Elektrisches Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und magnetisches Feld  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  sind Vektoren, hängen von 4 Variablen  $\mathbf{r}$  und  $t$  ab, Bedeutung von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  eher abstrakt.

- Modelliere Saite durch  $N+1$  identische Massenpunkte (Massen  $m$ , Positionen  $\mathbf{r}_j = (x_j, z_j)$ ) verbunden mit  $N$  identischen Federn (Ruhelängen 0, Federkonstanten  $k$ ):

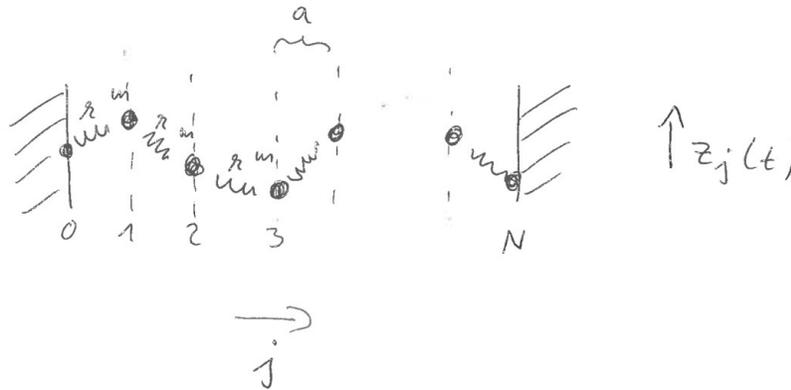
- Saite an beiden Enden im Abstand  $L$  in  $x$ -Richtung eingespannt, keine longitudinalen Auslenkungen (d.h. Auslenkungen in  $x$ -Richtung):  $x_j = aj$  mit Abstand  $a = L/N$  zwischen benachbarten Massenpunkten.

- Dynamische Freiheitsgrade sind transversale Auslenkungen  $z_j(t)$ .
- Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \sum_{j=0}^N \frac{m}{2} \dot{z}_j^2(t) - \sum_{j=1}^N \frac{k}{2} \left( a^2 + (z_j(t) - z_{j-1}(t))^2 \right) \quad (257)$$

(nahezu identisch zur Lagrange-Funktion des 1-dimensionalen Kristalls (244)).

Bild - 025



\*\*\*\*\* 12. Juli 2022 (26. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Übergang ins Kontinuum:  $N \rightarrow \infty$ , wobei  $L = Na = \text{const}$ , d.h.  $a = L/N \rightarrow 0$  (**Kontinuumslimites**).

- Massendichte (bzw. Gesamtmasse) der Saite bleibt konstant,  $\rho = m/a = \text{const}$ , d.h.  $m = \rho a \rightarrow 0$ ,
- $\kappa = ka = \text{const}$ , d.h.  $k = \kappa/a \rightarrow \infty$  (eine Feder [Federkonstante  $k$ ] in 2 "halbe Federn" zu zerschneiden liefert 2 Federn mit Federkonstanten  $2k$ :  
 $V = kx^2/2 = (2k)(x/2)^2/2 + (2k)(x/2)^2/2 = \text{const}$ ).
- Endliche  $m$  und  $k$  sind im Kontinuumslimites nicht sinnvoll, müssen durch endliche  $\rho$  und  $\kappa$  ersetzt werden.
- Außerdem

$$z_j(t) \rightarrow z(x, t) \quad (x = aj) \quad (258)$$

$$\sum_j a \rightarrow \int_0^L dx \quad (259)$$

$$\frac{z_j(t) - z_{j-1}(t)}{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} z(x, t) = z'(x, t), \quad (260)$$

d.h. diskreter Index  $j$  wird durch kontinuierliche Variable  $x$  ersetzt, Summen durch Integrale, finite Differenzen durch Ableitungen.

– Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{j=0}^N a \frac{m}{2a} \dot{z}_j^2(t) - \sum_{j=1}^N a \frac{ka}{2} \left( \frac{z_j(t) - z_{j-1}(t)}{a} \right)^2 \rightarrow \\
 &\rightarrow \int_0^L dx \underbrace{\left( \frac{\rho}{2} \dot{z}^2(x, t) - \frac{\kappa}{2} z'^2(x, t) \right)}_{=\mathcal{L}(\dot{z}, z', z)} \quad (261)
 \end{aligned}$$

(unterscheidet sich um irrelevante Konstante von (257)).

\*  $\mathcal{L}(\dot{z}, z', z)$  wird als Lagrange-Dichte bezeichnet (Integral über  $x$  liefert Lagrange-Funktion).

\* Wirkung der Saite:

$$S[z] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \mathcal{L}(\dot{z}, z', z). \quad (262)$$

• Variationsrechnung analog zu Abschnitt 2.2,

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \delta z \right) = \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \delta z \right) + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z \right) \\
 &\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left( - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right) \delta z = \\
 &= \underbrace{\int_0^L dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \delta z \Big|_{t=t_i}^{t=t_f}}_{=0} + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z \Big|_{x=0}^{x=L} \\
 &\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^L dx \left( - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right) \delta z, \quad (263)
 \end{aligned}$$

liefert eine Variante der Euler-Lagrange-Gleichungen, die BGl oder **Feldgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0, \quad (264)$$

sowie eine am Rand des Felds (d.h. bei  $x = 0$  und  $x = L$ ) zusätzlich zu erfüllende Gleichung

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z \Big|_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (265)$$

(ähnlich wie beim gebogenen Balken in Hausaufgabe [Blatt 7, Aufgabe 3]).

- Feldgleichungen (264) sind partielle DGLs, d.h. DGLs in mehreren Variablen, und daher i.A. viel schwieriger zu lösen, als gewöhnliche DGLs der Mechanik.
- Der erste Term nach dem letzten Gleichheitszeichen verschwindet aufgrund des Hamiltonschen Prinzips, bei dem  $z(x, t)$  bei  $t = t_i$  und bei  $t = t_f$  vorgegeben ist, d.h.  $\delta z(x, t_i) = \delta z(x, t_f) = 0$ .

– “Randbedingungen” (265) sind in Feldtheorie ebenso wichtig, wie Feldgleichungen (264), dürfen nicht ignoriert oder vergessen werden.

- Einsetzen der Lagrange-Dichte der Saite (Gleichung (261)) liefert Feldgleichung

$$\rho \ddot{z}(x, t) - \kappa z''(x, t) = 0 \quad (266)$$

sowie

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \left( z'(L, t) \delta z(L, t) - z'(0, t) \delta z(0, t) \right) = 0. \quad (267)$$

\*\*\*\*\* 15. Juli 2022 (27. Vorlesung) \*\*\*\*\*

- Allgemeine Lösung der Feldgleichung (266) einfach (durch “scharfes Hinschauen”),

$$z(x, t) = z_+(x + vt) + z_-(x - vt) \quad , \quad v = \sqrt{\kappa/\rho}. \quad (268)$$

- $z_+$  und  $z_-$  sind beliebige unabhängige Funktionen in jeweils einer Variable.
- $z_+(x + vt)$  entspricht in negativer  $x$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $v$  laufenden Welle.  
 $z_-(x - vt)$  entspricht in positiver  $x$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $v$  laufenden Welle.  
 $\rightarrow$  (268) wird auch als **Wellengleichung** bezeichnet.
- Wellengleichungen analog zu (266) existieren auch in 3 oder mehr Variablen (z.B. Feldgleichung einer schwingenden Membran, Feldgleichungen des elektrischen und magnetischen Feldes), dann einfache Lösung wie in (268) nicht mehr möglich (siehe Abschnitt 5.2).

- Für weitere Lösung ist physikalische Vorgabe für Endpunkte der Saite erforderlich (z.B. eingespannt, frei beweglich, periodisch).

- Typische Vorgabe ist beidseitig eingespannte Saite (sogenannte **Dirichlet-Randbedingungen**):  $z(0, t) = z(L, t) = 0$ .

– Es folgt  $\delta z(0, t) = \delta z(L, t) = 0$ , damit (267) automatisch erfüllt.

– Einsetzen von (268) liefert Bedingungen an  $z_+$  und  $z_-$ :

$$z(0, t) = z_+(+vt) + z_-(-vt) = 0 \quad (269)$$

$$z(L, t) = z_+(L + vt) + z_-(L - vt) = 0, \quad (270)$$

woraus

$$z_+(+u) + z_-(-u) = 0 \quad (271)$$

$$z_+(+u + 2L) + z_-(-u) = 0 \quad (272)$$

bzw.

$$z_+(+u + 2L) - z_+(+u) = 0 \quad , \quad z_-(+u) = -z_-(-u) \quad (273)$$

folgt.

$\rightarrow z_+$  ist damit beliebige  $2L$ -periodische Funktion.

$\rightarrow z_-$  ist durch  $z_+$  vollständig festgelegt.

- Spezielle Lösung erfordert Vorgabe von ABs, z.B.  $z(x, 0) = f(x)$  (Auslenkung der Saite bei  $t = 0$ ) und  $\dot{z}(x, 0) = g(x)$  (Geschwindigkeit der Saite bei  $t = 0$ ), legen  $z_+$  und damit  $z(x, t)$  eindeutig fest:

- Einsetzen von (273) in (268) liefert  $z$  und  $\dot{z}$  ausgedrückt durch  $z_+$ :

$$z(x, t) = z_+(+x + vt) - z_+(-x + vt) \quad (274)$$

$$\dot{z}(x, t) = v \left( z'_+(+x + vt) - z'_+(-x + vt) \right) \quad (275)$$

( $z'_+$  bzw.  $z'_-$  bezeichnet Ableitung nach Argument von  $z_+$  bzw.  $z_-$ , nicht Ableitung nach  $x$ ).

- ABs liefern Gleichungssystem zur Bestimmung von  $z_+$ :

$$z(x, 0) = z_+(+x) - z_+(-x) = f(x)$$

$$\dot{z}(x, 0) = v \left( z'_+(+x) - z'_+(-x) \right) = g(x)$$

$$\rightarrow v \left( z_+(+x) + z_+(-x) \right) = \int dx g(x) = G(x)$$

$$\rightarrow z_+(+x) + z_+(-x) = \frac{G(x)}{v}$$

$$\rightarrow z_+(+x) = \frac{1}{2} \left( +f(x) + \frac{G(x)}{v} \right)$$

$$\rightarrow z_+(-x) = \frac{1}{2} \left( -f(x) + \frac{G(x)}{v} \right) \quad (276)$$

( $G$  ist Stammfunktion von  $g$ ; Gleichungen gelten für  $0 \leq x \leq L$ , legen damit  $z_+(u)$  für  $-L \leq u \leq +L$  fest, Periodizität (273) legt dann  $z_+(u)$  für  $u \in \mathbb{R}$  fest und damit  $z(x, t)$  gemäß (274)).

- Konkretes Beispiel:

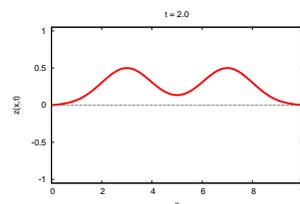
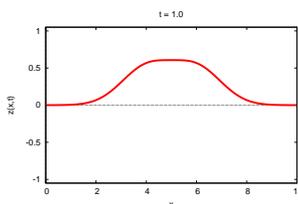
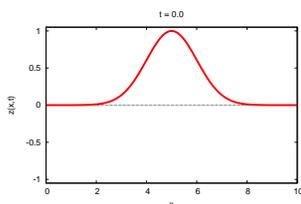
- \* ABs

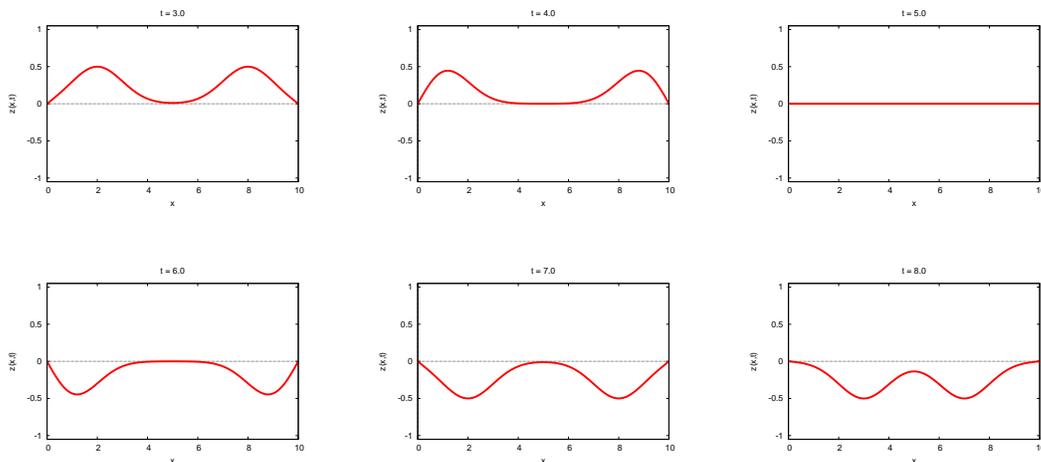
$$z(x, 0) = f(x) = \Delta \left( \exp \left( -\frac{(x - L/2)^2}{2\sigma^2} \right) - \exp \left( -\frac{(L/2)^2}{2\sigma^2} \right) \right) \quad (277)$$

$$\dot{z}(x, 0) = g(x) = 0 \rightarrow G(x) = 0, \quad (278)$$

d.h. bei  $t = 0$  mittige gaußförmige Auslenkung um  $\approx \Delta$  mit Breite  $\approx \sigma$ , Saite dabei in Ruhe.

- \* Abbildungen für  $L = 10.0$ ,  $\Delta = 1.0$ ,  $\sigma = 1.0$ ,  $v = 1.0$ : Gaußförmige Auslenkung teilt sich in links- und rechtslaufende Welle, wird an eingespannten Enden reflektiert, läuft mit umgekehrtem Vorzeichen wieder zurück.





## 5.2 Ausblick: Mehrdimensionale Erweiterungen, Bedeutung der Wellengleichung in der Elementarteilchenphysik

- In Abschnitt 5.1 diskutierte Grundlagen von zentraler Bedeutung, da Wellengleichung in vielen modernen Theorien, insbesondere in Elementarteilchenphysik auftritt.
- Erlaubt man Schwingungen der Saite nicht nur in  $z$ - sondern auch in  $y$ -Richtung, erhält man eine identische Wellengleichung für  $y(x, t)$  bzw. das Feld der Wellengleichung ist ein **Vektorfeld**  $\mathbf{X}(x, t) = (y(x, t), z(x, t))$  mit Feldgleichung

$$\frac{1}{v^2} \ddot{\mathbf{X}}(x, t) - \mathbf{X}''(x, t) = 0. \quad (279)$$

- Erlaubt man Schwingungen der Saite in allen Raumdimensionen und ersetzt man  $x$  durch einen Parameter  $s$ , der die Saite parametrisiert, erhält man einen sogenannten **String**  $\mathbf{X}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$  mit Feldgleichung

$$\frac{1}{v^2} \ddot{\mathbf{X}}(s, t) - \mathbf{X}''(s, t) = 0 \quad (280)$$

( $\mathbf{X}'' = (\partial^2/\partial s^2)\mathbf{X}$ ); relativistische Formulierung und Quantisierung liefert die **Stringtheorie**, eine moderne spekulative Theorie der Elementarteilchenphysik, die das Potential besitzt, alle vier fundamentalen Kräfte (Gravitation, Elektromagnetismus, starke WW, schwache WW) auf Quantenebene zu beschreiben.

- Erweitert man 1-dimensionales Modell von Massenpunkten und Federn auf 2 Dimensionen, wird durch resultierendes Feld  $z(x, y, t)$  und zugehörige Feldgleichung

$$\frac{1}{v^2} \ddot{z}(x, y, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y, t) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y, t) = 0 \quad (281)$$

eine schwingende Membran (Trommel) beschrieben.

- Erweiterung auf 3 Dimensionen und Interpretation der räumlichen Auslenkung  $z$  als Auslenkung eines Vektorfelds  $\mathbf{E}$  oder  $\mathbf{B}$  in einem abstrakten Vektorraum liefert Wellengleichungen des elektrischen und magnetischen Felds,

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) - \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (282)$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) - \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (283)$$

wobei der **Laplace-Operator**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (284)$$

verwendet wurde; ausführliche Diskussion im nächsten Semester in “Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik”.

- Alle Elementarteilchen (nicht nur Photonen, auch Elektronen, Quarks, Gluonen, Gravitonen, ...) werden durch Felder beschrieben mit Feldgleichungen, die zumindest teilweise die Struktur einer Wellengleichung aufweisen.