# Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2022 – Prof. Marc Wagner

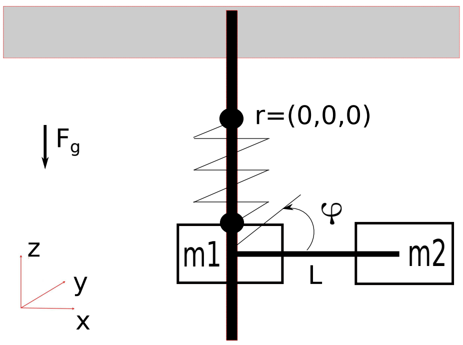
Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

## Aufgabenblatt 7

*vom 27.05.22, Abgabe am 03.06.22, Besprechung in der Woche vom 06.06.22*

### Aufgabe 1 [*Feder und Massenpunkt*] (1+2+2+1=6 Pkt.)

Ein auf einer senkrechten Stange unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft gleitender Massenpunkt (Masse $m_1$) ist über eine Feder (Federkonstante $k$, Ruhelänge 0) mit der Stange verbunden. Über eine weitere Stange der Länge $L$ (bildet stets einen 90°-Winkel zur ersten Stange, ist ansonsten drehbar) ist dieser Massenpunkt mit einem zweiten Massenpunkt (Masse $m_2$) verbunden (siehe Bild).




(a) Verwende generalisierte Koordinaten $(z, \varphi)$ und stelle die Lagrange-Funktion auf.

(b) Bestimme die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

(c) Bestimme die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.

(d) Bestimme die spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen für

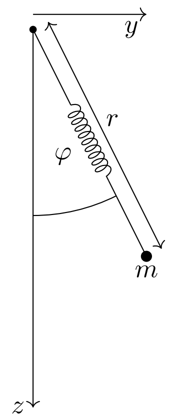
$$\mathbf{r}_1(t=0) = (0,0,0), \quad \dot{\mathbf{r}}_1(t=0) = (0,0,0),$$
$$\mathbf{r}_2(t=0) = (L,0,0), \quad \dot{\mathbf{r}}_2(t=0) = (0,u,0).$$

### Aufgabe 2 [*Schwingende Feder*] (2+1=3 Pkt.)

Ein Massepunkt $m$ führt eine Bewegung in der $yz$-Ebene aus. Der Massepunkt ist an einer Feder mit Federkonstante $k$ im homogenen Gravitationsfeld der Erde aufgehängt. Die Feder hat in Ruhelage eine Länge $r_0$ und ist so befestigt, dass sie zusätzlich zur Federschwingung eine ebene Pendelbewegung ausführt (siehe Skizze).

(a) Stelle die Lagrange-Funktion des Federpendels auf und leite mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen in geeigneten generalisierten Koordinaten her.

(b) Löse die Bewegungsgleichungen für kleine Winkelauslenkungen $|\varphi| \ll 1$ und kleine Auslenkungen aus der Ruhelage $|r - r_0| \ll 1$.




## Aufgabe 3 [*Balkenbiegung*] `(2+1+2+2=7 Pkt.)`

Ein gebogener Balken sei durch die Funktion $y(x)$ beschrieben ($x$: horizontale Koordinate; $y$: vertikale Koordinate). Die Energie eines "im wesentlichen waagrechten" Balkens, das heißt eines Balkens mit $\partial y/\partial x \ll 1$, der nicht auf Zug/Druck eingespannt ist und auf den eine Kraftdichte $f(x)$ in $y$-Richtung ausgeübt wird, lautet

$$E[y] \quad = \quad \int_0^L dx \left( -\frac{k}{2} y''^2 + f(x) y \right) \quad , \quad y'' \quad = \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

($L$: Balkenlänge; $k$: materialabhängige Konstante).

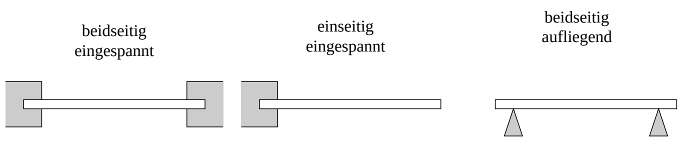
(a) Ein statischer Balken hat eine Form, die die Energie $E$ minimiert, d.h. es gilt $\delta E = 0$ für beliebige infinitesimale Formänderung $\delta y$. Leite daraus mit Hilfe von Variationsrechnung die Differentialgleichung her, die einen solchen Balken beschreibt, sowie zusätzlich auftretende Randbedingungen.
*Hinweis: Im Gegensatz zur Brachistochrone kann hier nicht auf die Euler-Lagrange-Gleichungen der Mechanik zurückgegriffen werden, da im zu minimierenden Funktional eine 2. Ableitung der gesuchten Funktion auftritt.*

(b) Verwende Deine Ergebnisse aus (a) um $y(x)$ für einen statischen Balken im Schwerefeld der Erde ($f(x) = -\rho g$; $\rho$: konstante Massendichte des Balkens) für die folgenden drei Fälle zu berechnen:

 (i) Beidseitig waagrecht eingespannter Balken: $y(0) = y(L) = 0$, $y'(0) = y'(L) = 0$.

 (ii) Einseitig waagrecht eingespannter Balken: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(iii) Beidseitig aufliegender Balken: $y(0) = y(L) = 0$.




## Aufgabe 4 [*Freie Bewegung auf Kugelfläche*] `(4 Pkt.)`

Betrachte ein Teilchen (Masse $m$), das sich ohne Einfluss von Kräften auf einer Kugelfläche mit Radius $R$ bewegt.

(a) Berechne den metrischen Tensor $g_{jk}$ und gib die Lagrange-Funktion an.

(b) Leite mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen ab.

(c) Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der $\vartheta$-Koordinatenlinien Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind.

(d) Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der $\varphi$-Koordinatenlinien im Allgemeinen keine Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind. Gibt es Ausnahmen?

*Hinweis: Verwende hier die Winkel $(q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi)$ der Standardkugelkoordinaten als generalisierte Koordinaten.*