Theoretische Physik 2 - Mechanik
Sommersemester 2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

# Aufgabenblatt 3

*vom 29.04.22, Abgabe am 06.05.22, Besprechung in der Woche vom 09.05.22*

## Aufgabe 1 [*Boost in beliebige Richtung*] (2+3+2+3=10 Pkt.)

(a) Leite durch Hintereinanderausführung von zwei parallelen Boosts die in der Vorlesung bestimmte Formel zur relativistischen Kombination (Addition) von Geschwindigkeiten her.

(b) Bisher wurden immer nur Boosts entlang einer Koordinaten-Achse betrachtet. Ziel dieser Teilaufgabe ist es nun, die Matrix für einen Boost in beliebige Richtung aufzustellen. Betrachte dazu das Bezugssystem $\Sigma'$, welches sich mit der Geschwindigkeit $c\boldsymbol{\beta}$ relativ zum Bezugssystem $\Sigma$ bewegt. Gehe zur Aufstellung der allgemeinen Boost-Matrix folgendermaßen vor:

(i) Betrachte den Vektor $\boldsymbol{r}$ im Bezugssystem $\Sigma$, der sich als $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp$ darstellen lässt, wobei $\boldsymbol{r}_\perp$ orthogonal und $\boldsymbol{r}_\parallel$ parallel zu $\boldsymbol{\beta}$ ist. Drücke $\boldsymbol{r}_\perp$ und $\boldsymbol{r}_\parallel$ jeweils durch $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{r}$ aus.

(ii) Schreibe $ct$, $\boldsymbol{r}_\parallel$, $\boldsymbol{r}_\perp$ und damit auch $\boldsymbol{r}$ als Funktion von $ct'$, $\boldsymbol{r}'_\parallel$, $\boldsymbol{r}'_\perp$, $\boldsymbol{\beta}$ und $\gamma = \left(1 - \boldsymbol{\beta}^2\right)^{-1/2}$.

(iii) Gib die Boost-Matrix an.

(c) Zeige, dass jeder Boost $\Lambda$ zur Lorentz-Gruppe gehört (d.h., $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ erfüllt ist).

(d) Leite mit Hilfe von (b) die allgemeine Formel zur Kombination von Geschwindigkeiten her, d.h. den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ in $\Sigma$ und $\boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}$ in $\Sigma'$ bei einem Boost mit $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{\beta}$. ($\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ können in beliebige Richtungen zeigen). Wende hierzu die in (b) gefundenen Ergebnisse auf $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ und $\mathrm{d}t$ an und drücke $\boldsymbol{u}$ durch $\boldsymbol{u}'$, $\gamma$ und $\boldsymbol{\beta}$ aus.

## Aufgabe 2 [*Obere und untere Indizes*] (1+1+1+2+2=7 Pkt.)

(a) Leite

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu$$

her, indem Du die definierende Eigenschaft von Lorentz-Transformationen $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu$ benutzt.

(b) Zeige, dass der folgende Vektor kovariant ist:

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(also wie $\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$ transformiert).

(c) Überprüfe, ob die folgenden Terme Lorentz-invariant sind:
(a) $\partial_\mu x^\mu$ (b) $\boldsymbol{x}^2$ (c) $x^\mu x_\mu$ (d) $x^\mu x^\nu$.
*Hinweis: Transformiere dazu die auftretenden Terme mithilfe einer Lorentz-Transformation in ein Bezugssystem $\Sigma'$ und überprüfe, ob der Ausdruck die gleiche Form wie im Bezugssystem $\Sigma$ hat.*

(d) In der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik existiert ein Lorentz-Tensor $F^{\mu\nu}$, der $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Felder wie folgt beinhaltet:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein solches Objekt mit zwei Lorentz-Indizes nennt man einen Tensor zweiter Stufe. Die Indizes werden genauso wie beim Raumzeit Vektor $x^\mu$ behandelt, z.B. gilt $F_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu}$ bzw. $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$.

(i) Drücke $F_\mu{}^\nu, F_{\mu\nu}$ und $F^\mu{}_\nu$ durch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus.

(ii) Drücke $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu$, $F_\mu{}^\mu$ durch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus.

(e) Wende einen Boost in $x$-Richtung auf $F^{\mu\nu}$ an und gib die neuen elektrischen ($\boldsymbol{E}'$) und magnetischen ($\boldsymbol{B}'$) Felder als Funktion der alten Felder an. Was fällt Dir auf?

## Aufgabe 3 [*Myon-Zerfall*] `(1+1+1=3 Pkt.)`

Myonen sind Elementarteilchen, die beispielsweise entstehen, wenn kosmische Strahlung mit Atomen in der äußeren Atmosphäre kollidiert. Myonen sind instabile Teilchen, die eine mittlere Lebensdauer von $\tau \approx 2\,\mu$s haben und deren Zerfall durch

$$N(t) = N_0\, e^{-t/\tau}$$

beschrieben wird. $N_0$ ist hierbei die anfängliche Zahl an Myonen bei $t = 0$, $N(t)$ ist die Anzahl an Myonen nzur Zeit $t$. Die Geschwindigkeit, mit der sich Myonen fortbewegen, beträgt etwa $v \approx 0.998c$.

(a) Warum beträgt die auf der Erde gemessene mittlere Lebensdauer des Myons etwa $35\,\mu$s? Begründe dies rechnerisch.

(b) Welche Strecke hat das Myon in dieser Zeit zurückgelegt?

(c) Nimm an, dass in einer Höhe von 9 km über der Erdoberfläche $10^8$ Myonen entstehen. Wie viele davon würden gemäß nichtrelativistischer Überlegungen auf der Erdoberfläche ankommen? Wie viele können tatsächlich aufgrund der Gesetzmäßigkeiten der speziellen Relativitätstheorie detektiert werden?