Theoretische Physik 2 - Mechanik

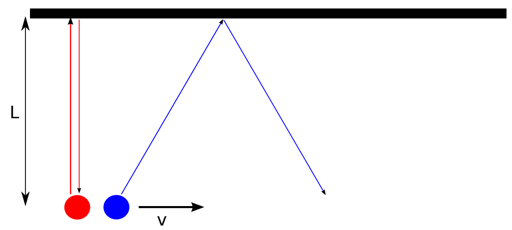
Sommersemester 2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 2

vom 22.04.22, Abgabe am 29.04.22, Besprechung in der Woche vom 02.05.22

Aufgabe 1 [*Experimente mit Licht*] (2+2+1=5 Pkt.)



Zwei Physiker führen ein Experiment mithilfe eines Spiegels durch. Einer der beiden Physiker befindet sich ruhend im Laborsystem, während sich der andere Physiker auf einer Trajektorie parallel zu dem Spiegel mit Geschwindigkeit v bewegt. Am gleichen Raumzeitpunkt senden beide Physiker ein Lichtsignal in Richtung Spiegel aus. Die Signale werden von dem Spiegel reflektiert und von den Physikern wieder detektiert.

(a) Führe folgende Aufgaben im Laborsystem aus:

  (i) Bestimme die Zeit, die das Signal des im Laborsystem ruhenden Physikers benötigt, um zum ruhenden Physiker zurückzukehren.

  (ii) Bestimme die Zeit, die das Signal des im Laborsystem bewegten Physikers benötigt, um zum bewegten Physiker zurückzukehren.

  (iii) Welcher Physiker empfängt sein Signal zuerst?

(b) Wiederhole (a).(i) bis (a).(iii) im Ruhesystem des bewegten Physikers.

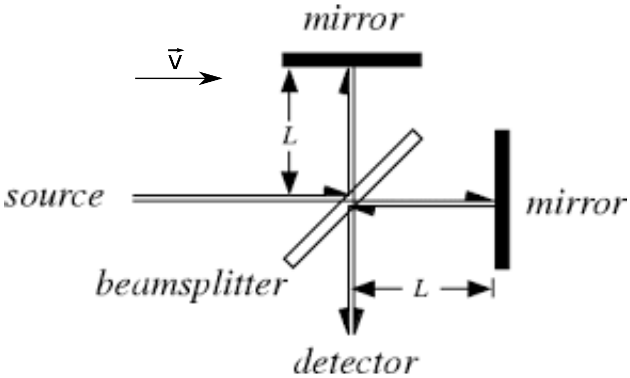
(c) Vergleiche die Zeiten, die das Signal des bewegten Physikers benötigt, um im Laborsystem bzw. im Ruhesystem des bewegten Physikers zurückzukehren. Warum sprechen wir von Zeitdilatation?

Hinweis: Licht soll sich entsprechend der speziellen Relativitätstheorie in all diesen Überlegungen, in jedem System mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten.

Aufgabe 2 [*Michelson-Morley Experiment*] (2+2+1+1=6 Pkt.)

Das Michelson–Morley Experiment wurde durchgeführt, um die Existenz des Äthers nachzuweisen. Unter dem Äther stellte man sich eine Substanz – eine

Art Fluid – vor, welche den gesamten "leeren" Raum ausfüllt und die Propagation von Licht ermöglicht. Ähnlich wie Wellen in Wasser, soll sich das Licht mit konstanter Geschwindigkeit c bezüglich des Äthers bewegen.
Das Experiment hat einen einfachen Aufbau und verwendet das sog. Michelson Interferometer. Von einer Quelle wird ein Lichtstrahl ausgesandt, welcher dann unter einem Winkel von 90 Grad aufgespalten wird. Die beiden Strahlen werden dann, wie dargestellt, jeweils von einem Spiegel reflektiert und zum Detektor zurückgeleitet. Das Experiment wurde so durchgeführt, dass die Geschwindigkeit des Erdorbits $\boldsymbol{v}$ relativ zum Äthersystem ausgenutzt wird. Ein Spiegel steht parallel zur Erdbewegung, der andere senkrecht dazu, wie es in der Abbildung dargestellt ist.



(a) Zur Zeit des Experiments war die spezielle Relativitätstheorie noch nicht formuliert. Deshalb gehen wir davon aus, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht absolut ist, d.h. die Lichtgeschwindigkeit nicht in jedem System gleich ist, sondern sich bezüglich dem Äther mit Geschwindigkeit c bewegt. Beschreibe qualitativ, welche Ergebnisse zu erwarten waren.

(b) Die Geschwindigkeit der Erde beträgt $v = 30$km/s relativ zum Äther und der Abstand zwischen Strahlteiler und Spiegeln ist jeweils $L = 30$m. Berechne im Rahmen der Äthertheorie die Zeitdifferenz zwischen zwei gleichzeitig emittierten Photonen, die an jeweils einem der Spiegel reflektiert werden.

(c) Wir nehmen an, dass das Experiment ausreichend genau und ohne Messfehler durchgeführt wurde. Die erwartete Zeitdifferenz konnte jedoch nicht gemessen werden. Welche Schlussfolgerungen konnte man daraus ziehen? Erläutere dies qualitativ, ausgehend von Deinem Wissen über Relativitätstheorie.

(d) Ignoriere nun die Äthertheorie und bestimme im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie die Zeitdifferenz zwischen den beiden Photonen.

Aufgabe 3 [*Lorentz- und Rotations-Gruppe*] `(1+2+3=6 Pkt.)`

Eine Gruppe G ist eine Menge von Elementen, mit einer Operation $\circ$ auf G, die die folgenden vier Axiome erfüllt:

1. $\forall a, b \in G,\ a \circ b \in G$ (Abgeschlossenheit)
2. $\forall a, b, c \in G,\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (Assoziativität)
3. $\exists e \in G / \forall a \in G, a \circ e = e \circ a = a$ (Existenz der Identität)
4. $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G / a \circ a^{-1} = e$ (Existenz des Inversen)

Die SO(3)-Gruppe (Rotationsgruppe):

Die SO(3) ist die Gruppe aller 3×3 Rotationsmatrizen U im reellen dreidimensionalen Raum. Sie ist folgendermaßen charakterisiert:

$$\forall U \in \mathrm{SO}(3), U^T U = \mathbb{1} \text{ und } \det(U) = 1 \tag{1}$$

(a) Beweise, dass die SO(3) eine Gruppe ist.

Die Lorentz-Gruppe:

Die Lorentz-Gruppe O(3,1) ist die Gruppe aller reellen 4×4 Matrizen U mit den folgenden Eigenschaften:

$$\forall U \in \mathrm{O}(3{,}1), U^T \eta U = \eta \tag{2}$$

mit $\eta = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

(a) Beweise, dass die O(3,1) eine Gruppe ist.

(b) Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $R \in$SO(3) sind Elemente von O(3,1).

(i) Beweise diese Aussage, d.h. zeige $M \in O(3,1), \forall R \in \mathrm{SO}(3)$.

(ii) Zeige, dass die Menge aller M eine Gruppe bildet.

Aufgabe 4 [*Rapidität, Geschwindigkeit und Hyperbelfunktionen*] `(1+1+1=3 Pkt.)`

(a) Beweise, dass $\mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ gilt. Nutze dies, um $e^{2\,\mathrm{artanh}(x)} = \frac{1+x}{1-x}$ zu zeigen.

(b) Betrachte die gleichgerichteten Geschwindigkeiten $c\beta_1$ und $c\beta_2$ und zeige, dass diese relativistisch kombiniert Geschwindigkeit $c\beta$ liefern gemäß:

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{1+\beta_1}{1-\beta_1} \frac{1+\beta_2}{1-\beta_2} \tag{4}$$

(Hinweis: Es ist zweckmäßig, zunächst Rapiditäten zu kombinieren und am Ende dann in Geschwindigkeiten umzurechnen.)

(c) Ein Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit v und Rapidität θ. Zeige, dass für die Endgeschwindigkeit v_f, die nach n-facher Kombination von v erreicht ist, die folgende Formel gilt:

$$v_f = c\frac{(e^{2\theta})^n - 1}{(e^{2\theta})^n + 1} \tag{5}$$

(Hinweis: $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$, wobei $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ durch Exponentialfunktionen ausgedrückt werden können.)