

Theoretische Physik 2

Klassische Mechanik

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Sommersemester 2020

Version: 8. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Spezielle Relativitätstheorie (relativistische Mechanik)	4
1.1	Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	4
1.2	Grundidee der speziellen Relativitätstheorie, Lorentz-Transformationen	5
1.3	Obere und untere Indizes	10
1.4	Relativistische Addition von Geschwindigkeiten	11
1.5	Zeitdilatation	13
1.6	Längenkontraktion	17
1.7	Eigenzeit, Zwillingsparadoxon	18
1.8	Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls	21
1.9	Relativistische BGl	22
1.10	Viererimpluserhaltung, relativistische Streuprozesse und Zerfälle	23
2	Lagrange-Formalismus	26
2.1	Prinzip der kleinsten Wirkung	26
2.2	Variationsrechnung, Euler-Lagrange-Gleichungen	28
2.3	Generalisierte Koordinaten	29
2.4	Euler-Lagrange-Gleichungen für generalisierte Koordinaten	31
2.5	Zusammenfassung und Beispiele	34
2.5.1	Massenpunkt auf rotierender Stange	34
2.5.2	Ebenes Doppelpendel im homogenen Gravitationsfeld	34
2.6	Bewegung in gekrümmten Räumen oder beschrieben durch krummlinige Koordinaten	35
2.6.1	Parallelen zur Metrik und oberen und unteren Indizes in SRT	39
2.6.2	Kräftefreie Bewegung	40
2.6.3	Geodätengleichung, ein weiteres Variationsproblem	42
2.6.4	Abschließendes Beispiel: Bewegung auf Kegelfläche im homogenen Schwerfeld der Erde	43
2.7	Erhaltungsgrößen, Symmetrien, Noether-Theorem	45
2.7.1	Zyklische Variablen und Erhaltungsgrößen	45
2.7.2	Noether-Theorem	46
3	Hamilton-Formalismus	50
3.1	Legendre-Transformation	50

3.2	Hamiltonsche BGLs	52
3.3	Poisson-Klammern	53
3.4	Phasenraum	54
4	Kleine Schwingungen von Vielteilchensystemen	57
4.1	Quadratische Näherung der Lagrange-Funktion	57
4.2	BGLs und deren Lösung	60
4.3	Normalschwingungen und Normalkoordinaten	63
4.4	Ausbreitung von Wellen im Kristall	65
5	Starrer Körper	70
5.1	Definition, charakteristische Größen	70
5.2	Rotationsmatrizen	70
5.3	Rotation um feste Achse	72
5.3.1	Physikalisches Pendel	73
5.3.2	Satz von Steiner	75
5.4	Rollbewegung	76

1 Spezielle Relativitätstheorie (relativistische Mechanik)

1.1 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

- Wiederholung, “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (nicht-relativistische Mechanik):

– Inertialsysteme:

- * Koordinatensysteme, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen bzw. sich relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.
- * In ihnen gilt das 1. Newtonsche Axiom (Trägheitsprinzip):
Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

– Koordinatentransformation zwischen zwei Inertialsystemen: **Galilei-Transformation**.

- * Siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (WiSe 2015/16), Aufgabenblatt 3.

* Betrachte zwei parallel ausgerichtete Inertialsysteme,

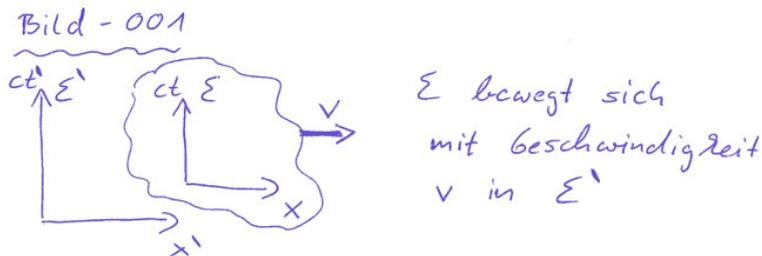
- Σ , Raumzeitkoordinaten (t, \mathbf{x}) ,
- Σ' , Raumzeitkoordinaten (t', \mathbf{x}') ,

die sich relativ zueinander in x -Richtung mit Geschwindigkeit $v = \text{const}$ bewegen:

$$t' = t + t_0 \quad , \quad x' = x + vt + x_0 \quad , \quad y' = y + y_0 \quad , \quad z' = z + z_0. \quad (1)$$

* Galilei-Transformation von Σ nach Σ' :

- t_0 : Konstante Zeitdifferenz (**Translation in Zeit**), häufig und auch im Folgenden stets $t_0 = 0$ (d.h. $t' = t$).
- (x_0, y_0, z_0) : Konstante räumliche Verschiebung (**Translation im Raum**), häufig und auch im Folgenden stets $(x_0, y_0, z_0) = 0$ (d.h. $x' = x + vt$, $y' = y$, $z' = z$).



- Lichtsignal (z.B. ein Photon) zum Zeitpunkt $t = 0$ von einem in Σ bei $x = 0$ ruhenden Experimentator in positive x -Richtung ausgesendet: $x_{\text{LS}}(t) = ct$ ¹ (c : Geschwindigkeit des Lichts in Σ).

¹Hier und auch häufig im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit nur 1 Raumdimension.

- Beobachter in Σ' : $x'_{\text{LS}}(t) = x_{\text{LS}}(t) + vt = (c + v)t = c't$ ($c' = c + v$: Geschwindigkeit des Lichts in Σ').
- In nicht-relativistischer Mechanik ist Lichtgeschwindigkeit also nicht universell, außerdem beliebig hohe Geschwindigkeiten möglich, also auch "Überlichtgeschwindigkeit".
- Aussage steht im Widerspruch zu Experimenten, z.B. Michelson-Moreley-Experiment (1881, 1887):
 - Ziel: Messung des Ätherwinds.
 - Überraschendes Ergebnis: Konstanz/Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in jedem Bezugssystem, d.h. $c = c' \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} = \text{const.}$

1.2 Grundidee der speziellen Relativitätstheorie, Lorentz-Transformationen

- **Spezielle Relativitätstheorie (SRT)**, Einstein (1905).
- Modifiziere Galilei-Transformation (1) so, dass $c = \text{const}$, d.h. sich die Lichtgeschwindigkeit bei Übergang in andere Inertialsysteme nicht verändert.
 - Transformation von Σ nach Σ' soll weiterhin linear sein,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}. \quad (2)$$
 - * Λ : Matrix, hängt von Parametern der Transformation ab, in 1 Raumdimension z.B. nur von v , nicht aber von t oder \mathbf{x} .
 - * Notation: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x})$ (Raumzeitvektor; Verwendung griechischer Indizes ist Konvention; ein Satz von 4 Größen, der sich gemäß (2) transformiert, z.B. x^μ , wird als **Vierervektor** bezeichnet).
 - * Üblich ist Komponentenschreibweise, d.h. äquivalent zu (2) ist

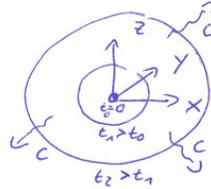
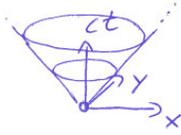
$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3)$$
 (Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert; Bedeutung von oberen und unteren Indizes später).
 - * $x^\mu = 0$ entspricht $x'^\mu = 0$ bzw. $0 = 0'$, d.h. keine Translation in Zeit oder im Raum.
 - Transformation (2) bzw. (3) soll für Geschwindigkeiten $\ll c$ in (1) übergehen (nicht-relativistische Mechanik ist exzellente Beschreibung der Natur für Geschwindigkeiten $\ll c$).
 - $t \neq t'$, d.h. Zeit vergeht unterschiedlich schnell in unterschiedlichen Inertialsystemen (sonst lassen sich obige Forderungen nicht erfüllen).

Λ , d.h. Transformationen zwischen Inertialsystemen in SRT, werden als **Lorentz-Transformationen** bezeichnet, die eingeführten griechischen Indizes als **Lorentz-Indizes**, **Vierervektoren** oder **Raumzeitindizes**.

- $c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = 0$ beschreibt **Lichtkegel** bei $x^\mu = 0$, d.h. Raumzeitpunkte $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$, die von einem zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\mathbf{x} = 0$ ausgesandten Lichtsignal (ein Kugelblitz) "beleuchtet" werden.

Bild - 002

Lichtkegel



- Es muss gelten

$$c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 = 0, \quad (4)$$

d.h. aufgrund von $c = \text{const}$ hat ein Lichtkegel in jedem Inertialsystem die gleiche Form.

- **Raumzeitabstand** zwischen **Ereignissen** x_A^μ und x_B^μ :

$$\Delta x_{BA}^2 = (ct_B - ct_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2. \quad (5)$$

- Starke Ähnlichkeit zu Euklidischem Abstand $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$; Raumzeitabstände können jedoch auch negativ sein.
- Lichtkegel bei x_A^μ : Menge aller Raumzeitpunkte x_B^μ mit Abstand $\Delta x_{BA}^2 = 0$ zu x_A^μ .
- Experimenteller Befund: Nicht nur Lichtgeschwindigkeit/Lichtkegel, sondern auch beliebige Raumzeitabstände unverändert bei Wechsel des Inertialsystems.
- Ersetze daher (4) durch stärkere Bedingung an Λ :

$$c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 \quad (6)$$

(aus Gründen der Übersichtlichkeit hier nicht Raumzeitabstände zwischen x_A^μ und x_B^μ sondern zwischen x^μ und 0 betrachtet [zulässig, da $0 = 0'$]).

- Mit der **Minkowski Metrik** (auch **Metrik**, **metrischer Tensor**)

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

lassen sich Raumzeitabstände auch einfach in Komponenten schreiben,

$$c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu. \quad (8)$$

- Bedingung (6) wird damit zu

$$x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x'^\rho \eta_{\rho\sigma} x'^\sigma = \Lambda^\rho{}_\mu x^\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu x^\nu \quad (9)$$

bzw.

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \quad (10)$$

bzw.

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (11)$$

- Starke Ähnlichkeit zu Rotationsmatrizen \mathcal{R} ; Euklidische Abstände, z.B. \mathbf{x}^2 , werden durch sie nicht verändert; erfüllen $\mathbb{1} = \mathcal{R}^T \mathbb{1} \mathcal{R}$ (siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2015/16], Abschnitt 10.2).
- Wie viele Parameter hat Λ ?
 - Λ ist reelle 4×4 -Matrix, hat also 16 Einträge.
 - (10) bzw. (11) entspricht 10 unabhängigen Bedingungen (keine 16, da $\mu \leftrightarrow \nu$ dieselbe Gleichung liefert, d.h. (10) symmetrisch in μ - ν ist).

→ 6 freie Parameter bzw. unabhängige Transformationen Λ .

- 3 Parameter sollten (zeitunabhängigen) Rotationen entsprechen:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix} \quad (12)$$

(\mathcal{R} ist 3×3 -Rotationsmatrix) eingesetzt in (11) liefert

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix} \quad (13)$$

bzw. $\mathbb{1} = \mathcal{R}^T \mathcal{R}$ (definierende Eigenschaft von Rotationsmatrizen); Rotationsmatrizen sind also Lorentz-Transformationen.

- Beispiel zur Erinnerung: Rotation um Winkel α um die z -Achse,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} +\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ +\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

bzw.

$$\Lambda = \mathcal{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & +\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

(Rotation um x - und y -Achse analog).

- Verbleibende 3 Parameter sollten Transformationen zwischen Inertialsystemen entsprechen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen (sogenannte **Boosts**).

- Relativistisches Analog von (1).
- Werden Zeitkoordinate miteinbeziehen.
- Werden aufgrund von (11) ähnliche Struktur, wie Rotationsmatrizen aufweisen.

Versuch (Boost in x -Richtung):

$$\Lambda = \mathcal{B}_x(\phi) = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi) & +\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ +\sinh(\phi) & +\cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

... erfüllt $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$, wie man leicht nachrechnen kann.

- Analog Boosts in y - und z -Richtung:

$$\Lambda = \mathcal{B}_y(\phi) = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi) & 0 & +\sinh(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\sinh(\phi) & 0 & +\cosh(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\Lambda = \mathcal{B}_z(\phi) = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi) & 0 & 0 & +\sinh(\phi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\sinh(\phi) & 0 & 0 & +\cosh(\phi) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

- Diese 6 Lorentz-Transformationen (3 Boosts, 3 Rotationen) sind unabhängig, d.h. keine dieser 6 Transformationen kann aus den jeweils anderen 5 zusammengesetzt werden (kann man zeigen).
- Jede Lorentz-Transformation (d.h. jedes Λ , das (10) bzw. (11) erfüllt [ausgenommen Zeit- und Raumspiegelungen]), kann durch geeignete Hintereinanderausführung der obigen 3 Boosts und 3 Rotationen zusammengesetzt werden (kann man zeigen).
- Was ist Bedeutung des Parameters ϕ (wird als **Rapidität** bezeichnet), d.h. in welcher Beziehung steht er zur Boost-Geschwindigkeit v ?

- Σ bewegt sich relativ zu Σ' mit Geschwindigkeit v in x -Richtung, d.h. $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ mit $\Lambda = \mathcal{B}_x$ entsprechend (16).
- Betrachte **Weltlinie** eines ruhenden Teilchens in Σ : $x_T^\mu = (ct, 0)$ (Weltlinie ersetzt in relativistischer Mechanik die Trajektorie).
- In Σ' gilt

$$x_T'^\mu = (ct', vt') \quad (19)$$

und damit

$$\begin{pmatrix} ct' \\ vt' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi) & +\sinh(\phi) \\ +\sinh(\phi) & +\cosh(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi)ct \\ +\sinh(\phi)ct \end{pmatrix}$$

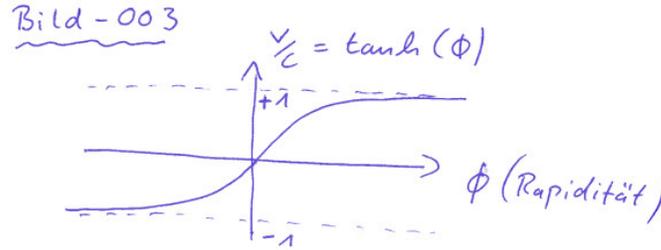
$$\rightarrow ct = \frac{1}{\cosh(\phi)} ct'$$

$$\rightarrow vt' = \sinh(\phi)ct = \frac{\sinh(\phi)}{\cosh(\phi)} ct' \quad (20)$$

sowie

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh(\phi)}{\cosh(\phi)} = \tanh(\phi). \quad (21)$$

- Für $v/c \ll 1$ (bzw. $\phi \ll 1$) gilt $v/c \approx \phi$ (Taylor Näherung: $\tanh(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$), d.h. Geschwindigkeit und Rapidität sind gleichbedeutend (bis auf Faktor c).
- $v/c \rightarrow \pm 1$ entspricht $\phi \rightarrow \pm\infty$.



- Parametrisieren von Boosts durch Geschwindigkeiten v an Stelle von Rapiditäten ϕ (benutze $\tanh(\phi) = \sinh(\phi)/\cosh(\phi)$ und $\cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{c^2} &= \frac{\sinh^2(\phi)}{\cosh^2(\phi)} = \frac{\cosh^2(\phi) - 1}{\cosh^2(\phi)} \\ \rightarrow \frac{v^2}{c^2} \cosh^2(\phi) &= \cosh^2(\phi) - 1 \\ \rightarrow \cosh^2(\phi) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= 1 \\ \rightarrow \cosh^2(\phi) &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \\ \rightarrow \sinh^2(\phi) &= \cosh^2(\phi) - 1 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \frac{v^2}{c^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

d.h. mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ und wird (16) bis (18) zu

$$\Lambda = \mathcal{B}_x(v) = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & +\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\Lambda = \mathcal{B}_y(v) = \begin{pmatrix} +\gamma & 0 & +\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & 0 & +\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\Lambda = \mathcal{B}_z(v) = \begin{pmatrix} +\gamma & 0 & 0 & +\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\gamma\beta & 0 & 0 & +\gamma \end{pmatrix} \quad (25)$$

- Grenzfall $v/c \ll 1$: $\gamma = 1 + \mathcal{O}((v/c)^2)$ und damit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \mathcal{B}_x(v) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ct + \mathcal{O}(v/c) \\ x + vt + \mathcal{O}(v^2/c^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

d.h. man erhält die Galilei-Transformation (1) mit $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$.

1.3 Obere und untere Indizes

- Um Ausdrücke, in denen die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ vorkommt, z.B. $x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$ (Raumzeitabstand zu 0), kompakter schreiben zu können, verwendet man obere Indizes (**kontravariante Indizes**), z.B. x^μ , und untere Indizes (**kovariante Indizes**), z.B. x_μ .
- $x^\mu \neq x_\mu$, d.h. ob Indizes oben oder unten stehen ist von Bedeutung.
- Definition x_μ : $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$, d.h. mit Hilfe der Metrik kann ein oberer Index nach unten gezogen werden.
- Da $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$, gilt $x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$. Damit kann z.B. der Raumzeitabstand zu 0 als $x^\mu x_\mu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$ geschrieben werden.
- Da $x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$ invariant unter Lorentz-Transformationen (**Lorentz-invariant**) ist (siehe (9)), ist auch $x^\mu x_\mu$ Lorentz-invariant.
- Allgemein: Sind die Indizes μ von A^μ und B^μ Lorentz-Indizes, d.h. transformieren sich A^μ und B^μ unter Lorentz-Transformationen gemäß $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ und $B'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu B^\nu$, dann gilt

$$A'^\mu B'_\mu = \Lambda^\mu{}_\rho A^\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma B^\sigma = A^\rho \eta_{\rho\sigma} B^\sigma = A^\rho B_\rho \quad (27)$$

((10) wurde verwendet), d.h. wird über einen oberen und einen unteren Index summiert, ist die Summe Lorentz-invariant.

- Wird über Indizes summiert, d.h. tritt ein Index doppelt auf, dann immer einmal oben und einmal unten.

In SRT wird nie über zwei obere oder über zwei untere Indizes summiert.

Z.B. ist $x^\mu x^\mu = c^2 t^2 + \mathbf{x}^2$ nicht Lorentz-invariant und tritt daher in relativistisch sinnvollen Gleichungen nicht auf (sinnvolle Gleichungen müssen in allen Inertialsystemen gleich aussehen).

- Definition: $\eta^{\mu\nu}$ ist invers zu $\eta_{\mu\nu}$, also im einfachen Fall der Minkowski Metrik $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.
- Damit

$$\begin{aligned} x_\mu &= \eta_{\mu\nu} x^\nu \\ \rightarrow \eta^{\rho\mu} x_\mu &= \underbrace{\eta^{\rho\mu} \eta_{\mu\nu}}_{=\delta_{\rho\nu}} x^\nu = x^\rho \\ \rightarrow x^\mu &= \eta^{\mu\nu} x_\nu, \end{aligned} \quad (28)$$

d.h. mit Hilfe der Metrik kann auch ein unterer Index nach oben gezogen werden (beim Kronecker- δ stehen die Indizes immer unten, d.h. es wird nicht zwischen ko- und kontravarianten Indizes unterschieden; $\delta_{\mu\nu}$ deutet lediglich an, dass für $\mu \neq \nu$ der Ausdruck gleich 0 ist).

- $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$ und $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \eta^\mu{}_\rho$ und damit $\eta^\mu{}_\rho = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$; analog $\eta_{\mu}{}^\rho = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$ (äquivalent zu $\delta_{\mu\nu}$ kann daher auch $\eta^\mu{}_\nu$ bzw. $\eta_{\mu}{}^\nu$ verwendet werden, wobei im Gegensatz zu $\delta_{\mu\nu}$ die Unterscheidung und Bedeutung oberer und unterer Indizes erhalten bleibt).

- Außerdem

$$A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\rho} A_\rho \eta_{\mu\sigma} B^\sigma = A_\rho \eta^{\rho\mu} \eta_{\mu\sigma} B^\sigma = A_\rho B^\rho \quad (29)$$

($\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}$ und $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta_{\mu\rho}$ wurde verwendet).

1.4 Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

- “Addition” von gleichgerichteten Geschwindigkeiten (besser Kombination von Geschwindigkeiten):

– Ein Teilchen bewegt sich mit Geschwindigkeit u in Σ , d.h. $x_T = ut$. Mit welcher Geschwindigkeit u' bewegt es sich in Σ' (wie gehabt bewegt sich Σ mit Geschwindigkeit v in Σ')?

– Nicht-relativistisch: $u' = v + u$.

– Relativistisch:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x'_T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ut \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma(1 + \beta u/c)ct \\ \gamma(\beta + u/c)ct \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\rightarrow ct = \frac{ct'}{\gamma(1 + \beta u/c)}$$

$$\rightarrow x'_T = \frac{\gamma(\beta + u/c)ct'}{\gamma(1 + \beta u/c)} = \frac{v + u}{1 + vu/c^2} t' \quad (31)$$

und nach Vergleich mit $x'_T = u't'$

$$u' = \frac{v + u}{1 + vu/c^2}. \quad (32)$$

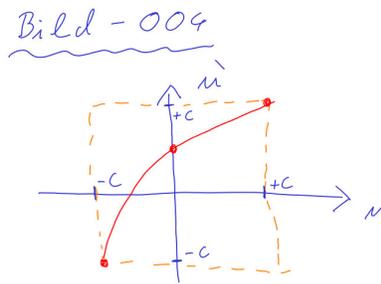
- Addition von gleichgerichteten Rapiditäten:

– v, u zugeordnete Rapiditäten: ϕ, ψ , d.h. $v/c = \sinh(\phi)/\cosh(\phi)$ und $u/c = \sinh(\psi)/\cosh(\psi)$.

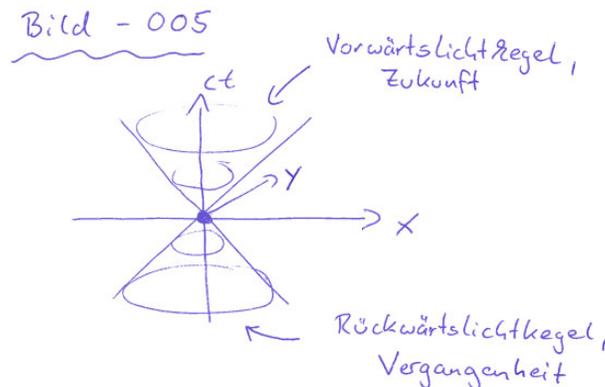
– Einsetzen in (32):

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(\psi')}{\cosh(\psi')} &= \frac{\sinh(\phi)/\cosh(\phi) + \sinh(\psi)/\cosh(\psi)}{1 + \sinh(\phi)\sinh(\psi)/\cosh(\phi)\cosh(\psi)} = \\ &= \frac{\sinh(\phi)\cosh(\psi) + \cosh(\phi)\sinh(\psi)}{\cosh(\phi)\cosh(\psi) + \sinh(\phi)\sinh(\psi)} = \frac{\sinh(\phi + \psi)}{\cosh(\phi + \psi)}. \end{aligned} \quad (33)$$

- Damit $\psi' = \phi + \psi$, d.h. simple Addition von Rapiditäten.
- Vorteil von Rapiditäten gegenüber Geschwindigkeiten:
 - Elegantere Formulierung, zeigt Parallelen zu Rotationen.
 - Kombination von Rapiditäten einfach (simple Addition).
- Dennoch häufig Verwendung von Geschwindigkeiten an Stelle von Rapiditäten (entspricht wohl eher unserer nicht-relativistischen Denkweise).
- (32) spiegelt Tatsache wieder, dass "Addition" zweier Geschwindigkeiten $\leq c$ wieder zu Geschwindigkeit $\leq c$ führt.

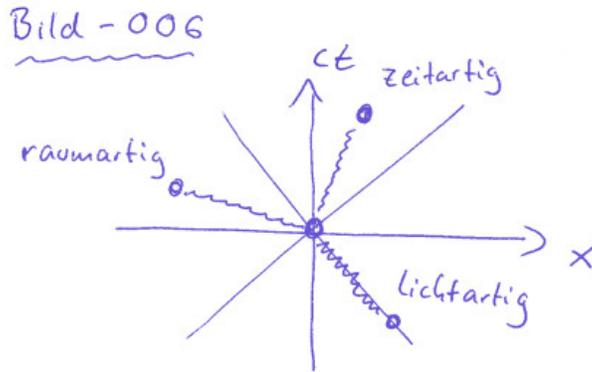


- Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit und **Kausalität**:
 - **Vorwärtslichtkegel** (bei 0): $x_\mu x^\mu = 0$ mit $x^0 \geq 0$.
Es besteht die Möglichkeit, Ereignisse im Vorwärtslichtkegel zu beeinflussen.
 - **Rückwärtslichtkegel** (bei 0): $x_\mu x^\mu = 0$ mit $x^0 \leq 0$.
Es besteht die Möglichkeit, von Ereignissen im Rückwärtslichtkegel beeinflusst worden zu sein.
 - Alle Ereignisse außerhalb des Lichtkegels können weder beeinflusst werden, noch kann man von ihnen beeinflusst worden sein.



- Klassifikation von Raumzeitabständen:
 - $x_\mu x^\mu > 0$: **Zeitartiger Abstand** zwischen x^μ und 0, d.h. x^μ im Lichtkegel von 0 und umgekehrt.

- $x_\mu x^\mu < 0$: **Raumartiger Abstand** zwischen x^μ und 0, d.h. x^μ außerhalb des Lichtkegels von 0 und umgekehrt.
- $x_\mu x^\mu = 0$: **Lichtartiger Abstand** zwischen x^μ und 0, d.h. x^μ auf dem Lichtkegel von 0 und umgekehrt, also x^μ und 0 durch ein Lichtsignal verbunden.



1.5 Zeitdilatation

- Zeit ist nicht absolut in SRT, Lorentz-Transformationen mischen Raum und Zeit.
- Ein Beobachter B' sieht die Uhr eines sich relativ zu ihm mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Beobachters B langsamer laufen, als seine eigene Uhr (**Zeitdilatation**).
- Beobachter B ruht in Σ , Weltlinie $x^\mu = (ct, 0)$, wobei t die Zeit ist, die B s Uhr anzeigt.
- Beobachter B' ruht in Σ' , Weltlinie $x'^\mu = (ct', 0)$, wobei t' die Zeit ist, die B' s Uhr anzeigt.
- Weltline von B in Σ' :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct \\ \gamma\beta ct \end{pmatrix}, \quad (34)$$

d.h.

$$t' = \gamma t. \quad (35)$$

- Da $\gamma \geq 1$, sieht B' die von B mitgeführte Uhr um Faktor γ langsamer laufen als seine eigene Uhr (z.B. für Relativgeschwindigkeit $v = (\sqrt{3}/2)c$ um Faktor $\gamma = 2$).
- Umgekehrt gilt das Gleiche, da sich B' in Σ mit Geschwindigkeit v bewegt:

$$t = \gamma t', \quad (36)$$

d.h. B sieht die von B' mitgeführte Uhr um den Faktor γ langsamer laufen als seine eigene Uhr.

- Wie kann das sein? Wie ist (35) mit (36) vereinbar? Widerspruch?

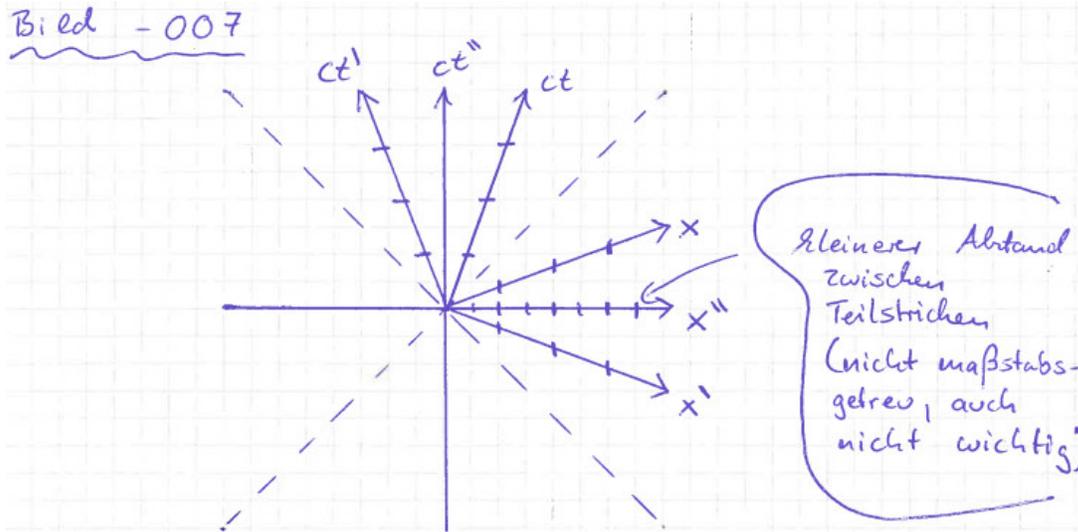
- Erklärung: Ereignisse, die für B gleichzeitig stattfinden (z.B. Ablesen der eigenen Uhr und der Uhr von B'), finden für B' zu verschiedenen Zeiten statt (und umgekehrt).
- Besseres Verständnis durch Raumzeit-Diagramm:
 - Relativgeschwindigkeit v zugeordnete Relativrapidität: $\phi = \operatorname{artanh}(v/c)$.
 - Splitte Boost von Σ nach Σ' in zwei Boosts mit Rapidität $\phi/2$ auf und führe ein neues "Hilfsinertialsystem" Σ'' ein (nicht unbedingt notwendig, aber praktisch für schnelles maßstabsgetreues Skizzieren von Raumzeitdiagrammen): $\Sigma \xleftarrow{-\phi/2} \Sigma'' \xrightarrow{+\phi/2} \Sigma'$.
 - Zeichne Σ'' mit orthogonalen Koordinatenachsen (horizontal x'' , vertikal ct'') ohne eine Skala aufzutragen.
 - Zeichne Koordinatenachsen von Σ (aus Sicht von Σ'') ins gleiche Diagramm:
 - * Boost zwischen Σ und Σ'' :

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi/2) & +\sinh(\phi/2) \\ +\sinh(\phi/2) & +\cosh(\phi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} =$$

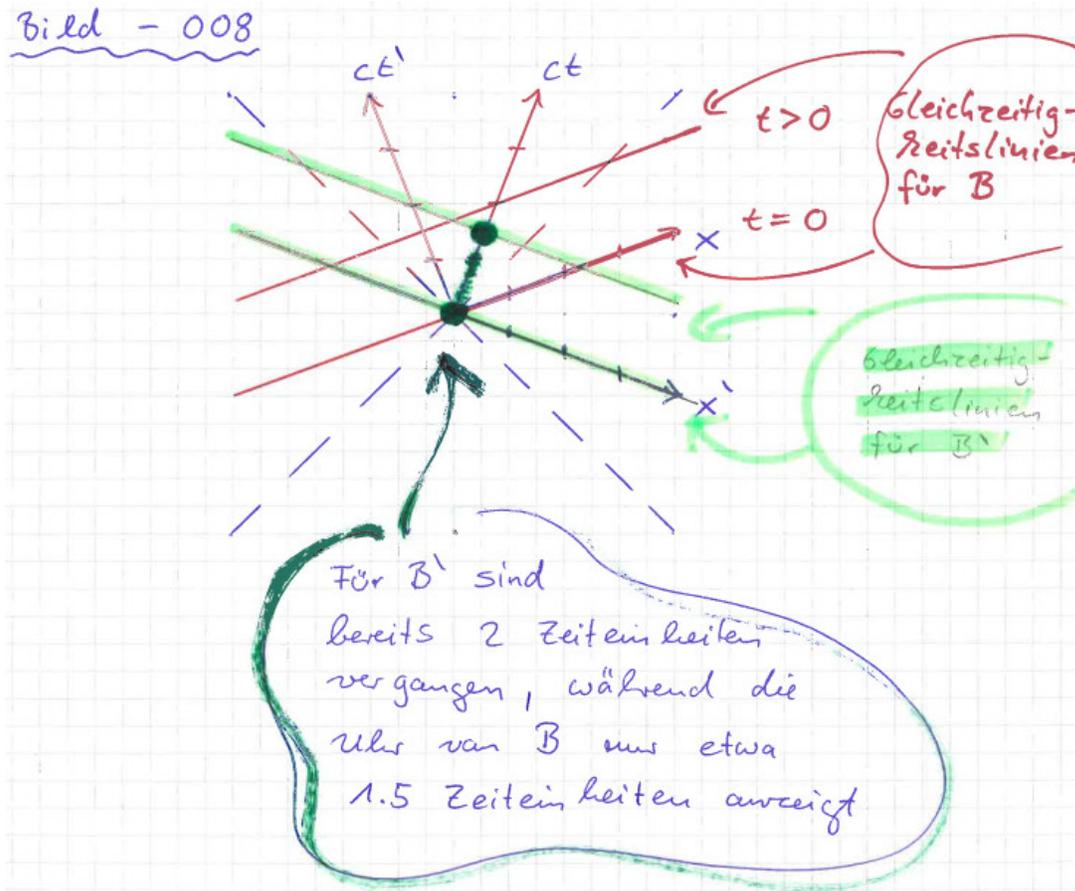
$$= \begin{pmatrix} +\cosh(\phi/2)ct + \sinh(\phi/2)x \\ +\sinh(\phi/2)ct + \cosh(\phi/2)x \end{pmatrix}. \quad (37)$$
 - * t -Achse entspricht $x = 0$, hat in Σ'' die Form $(\cosh(\phi/2), \sinh(\phi/2))ct$, wird parametrisiert durch t (Auftragen einer Skala noch nicht nötig).
 - * x -Achse entspricht $t = 0$, hat in Σ'' die Form $(\sinh(\phi/2), \cosh(\phi/2))x$, wird parametrisiert durch x (Auftragen einer Skala noch nicht nötig).
 - Analog: Zeichne Koordinatenachsen von Σ' (aus Sicht von Σ'') ins gleiche Diagramm:
 - * Boost zwischen Σ' und Σ'' :

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cosh(\phi/2) & -\sinh(\phi/2) \\ -\sinh(\phi/2) & +\cosh(\phi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} +\cosh(\phi/2)ct' - \sinh(\phi/2)x' \\ -\sinh(\phi/2)ct' + \cosh(\phi/2)x' \end{pmatrix}. \quad (38)$$
 - Trage auf den vier Achsen (t, x, t', x') die gleiche (beliebige) Skala ein (alle sind um den gleichen Winkel bezüglich den orthogonalen Achsen (t'' und x'') verdreht bzw. mit der gleichen Rapidität geboostet, d.h. gleicher Abstand zwischen Teilstrichen [der Grund, warum es zweckmäßig ist, den Boost zwischen Σ und Σ' zu splitten]).



- Raumzeitdiagramm macht deutlich,
 - dass Gleichzeitigkeit für B (parallele Linie zur x -Achse definiert durch $t = \text{const}$) nicht Gleichzeitigkeit für B' (parallele Linie zur x' -Achse definiert durch $t' = \text{const}$) entspricht,
 - dass nach vergangener Zeit t in Σ (Anzahl der Einheiten auf der t -Achse um die die "Gleichzeitigkeitslinie" von B verschoben ist) die Uhr von B' eine geringere Zeitdifferenz anzeigt (Anzahl der Einheiten auf der t' -Achse bis zum Schnittpunkt mit der Gleichzeitigkeitslinie von B),
 - dass nach vergangener Zeit t' in Σ' (Anzahl der Einheiten auf der t' -Achse um die die Gleichzeitigkeitslinie von B' verschoben ist) die Uhr von B eine geringere Zeitdifferenz anzeigt (Anzahl der Einheiten auf der t -Achse bis zum Schnittpunkt mit der Gleichzeitigkeitslinie von B'),



- Beispiel: Kosmische Myonen (Myon = eine Art schweres Elektron).
 - Entstehen bei Kollisionen der kosmischen Strahlung (vor allem aus dem Weltall kommende Protonen) mit Atomkernen der oberen Atmosphäre (in ≈ 10 km Höhe).
 - Mittlere Lebensdauer: $\tau_\mu \approx 2 \times 10^{-6}$ s (Myon zerfällt in ein Elektron und zwei Neutrinos).
 - Mittlere Geschwindigkeit: $v \approx 0.998 c$.
 - Nicht-relativistische Überlegung: $v\tau \approx (3 \times 10^8 \text{ m/s})(2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 600 \text{ m}$, Myonen würden also in ≈ 9 km Höhe bereits wieder zerfallen und sicher nicht die Erdoberfläche erreichen.
 - Sie werden aber auf der Erdoberfläche beobachtet. Warum?
 - Relativistische Überlegung:
 - * Mittlere Lebensdauer bezieht sich auf Zeit im System des Myons.
 - * Die vom Myon mitgeführte Uhr läuft aber aus Sicht eines Experimentators auf der Erdoberfläche langsamer aufgrund der Zeitdilatation, d.h. mittlere Lebensdauer im System des Experimentators

$$\begin{aligned} \tau_{\mu, \text{Experimentator}} &= \gamma \tau_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tau \approx 15.8 (2 \times 10^{-6} \text{ s}) = \\ &= 31.6 \times 10^{-6} \text{ s}. \end{aligned} \quad (39)$$

- * Zurückgelegte Strecke aus Sicht des Beobachters auf der Erdoberfläche:
 $v\tau_{\mu, \text{Experimentator}} \approx (3 \times 10^8 \text{ m/s})(31.6 \times 10^{-6} \text{ s}) = 9480 \text{ m}.$
- * Ein signifikanter Teil der Myonen erreicht also die Erdoberfläche.

1.6 Längenkontraktion

- Bewegt sich ein Objekt relativ zu einem Beobachter, ist es aus dessen Sicht in Bewegungsrichtung kürzer, als wenn es relativ zu diesem Beobachter ruht (**Längenkontraktion**).
- Betrachte Stab in 1 Raumdimension, Endpunkte A und B .
- Stab ruht in Σ , Weltlinien der Endpunkte in Σ sind $x_A^\mu = (ct, 0)$ und $x_B^\mu = (ct, L)$, d.h. Stab hat in Ruhe Länge L .
- Längenmessung in Σ' zum Zeitpunkt $t' = 0$:

– Lorentz-Transformation zwischen Σ und Σ' :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & +\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (40)$$

– $t' = 0$ liefert Beziehung zwischen t und x , $0 = ct + \beta x$ bzw. $t(t' = 0, x) = -\beta x/c$, d.h. abhängig von der räumlichen Koordinate x in Σ entsprechen verschiedene Zeitpunkte t in Σ dem gleichen Zeitpunkt $t' = 0$ in Σ' .

– Eine Längenmessung ist ein Vergleich der Endpunkte A und B zu gleicher Zeit, hier bei $t' = 0$ in Σ' (in Σ entspricht diese Längenmessung in Σ' einem Vergleich der Endpunkte A und B zu verschiedenen Zeiten).

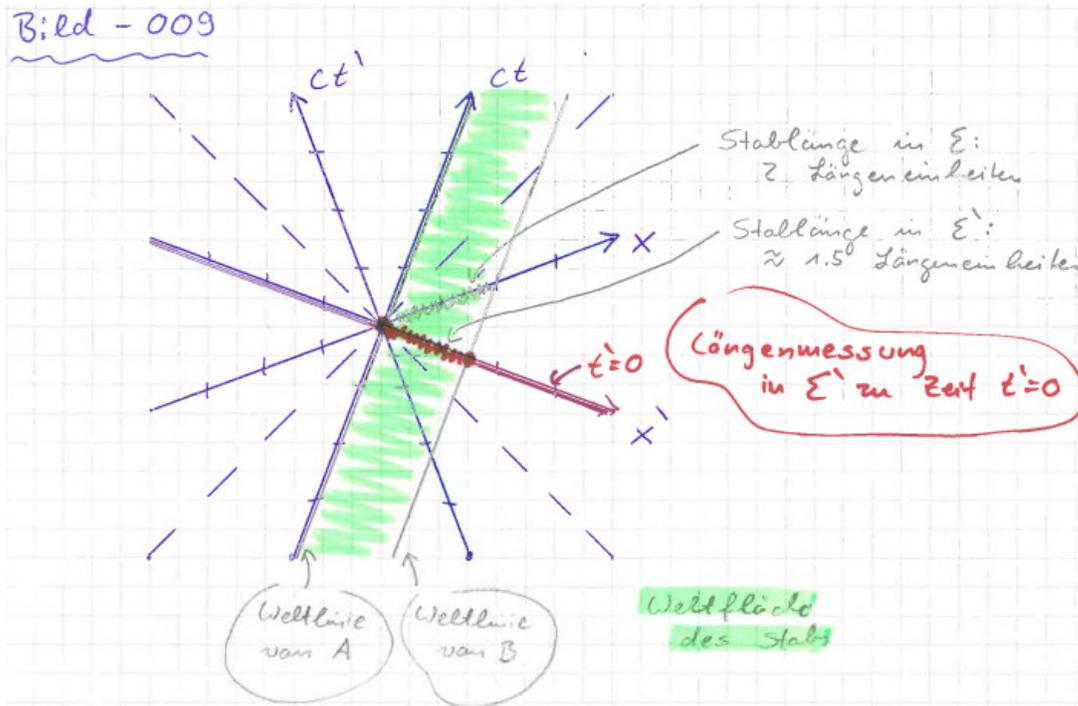
– Endpunkt A :

$$x'_A(t' = 0) = \gamma(vt(t' = 0, x_A) + x_A) = 0. \quad (41)$$

– Endpunkt B :

$$x'_B(t' = 0) = \gamma(vt(t' = 0, x_B) + x_B) = \gamma(-v\beta L/c + L) = \frac{1}{\gamma}L. \quad (42)$$

- Da $\gamma \geq 1$, ist der bewegte Stab in Σ' um den Faktor γ kürzer als der unbewegte Stab in Σ .
- Besseres Verständnis durch Raumzeitdiagramm.



- Umgekehrt gilt das Gleiche, d.h. z.B. für zwei sich entgegengerichtete Autofahrer ist das Auto des jeweils anderen Fahrers in Fahrtrichtung längenkontrahiert.
- Beispiel: Kosmische Myonen.

- Mittlere Lebensdauer $\tau \approx 2 \times 10^{-6}$ s bezieht sich auf Zeit im System des Myons.
- Abstand zur Erdoberfläche ist längenkontrahiert, da sich umgebener Raum einschließlich Erde relativ zum Myon mit Geschwindigkeit $v \approx 0.998 c$ bewegt, statt ≈ 10 km im System des Myons nur

$$\frac{1}{\gamma} \times 10 \text{ km} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \times 10 \text{ km} \approx 0.063 \times 10 \text{ km} = 630 \text{ m}. \quad (43)$$

- $v\tau \approx (3 \times 10^8 \text{ m/s})(2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 600 \text{ m}$, d.h. gleiches Ergebnis wie in Abschnitt 1.5, diesmal im System des Myons berechnet: Ein signifikanter Teil der Myonen erreicht die Erdoberfläche.

1.7 Eigenzeit, Zwillingsparadoxon

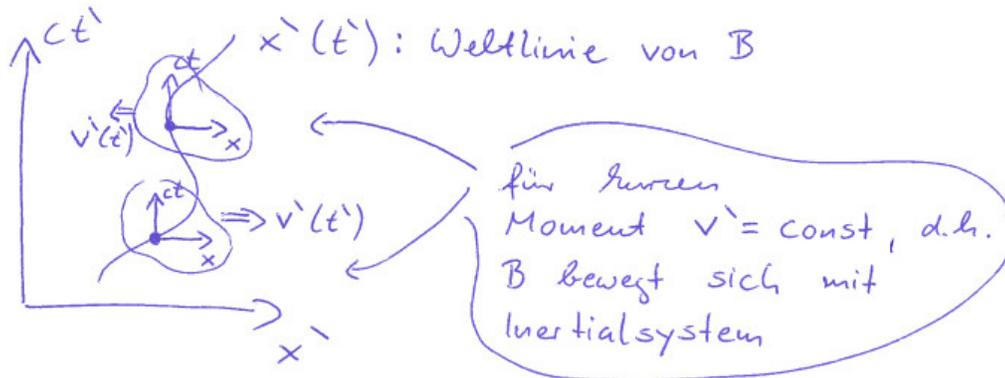
- Lorentz-Transformationen sind lineare Abbildungen, daher auch für finite Differenzen $\Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu$ und infinitesimale Differenzen $dx^\mu = (c dt, d\mathbf{x})$ gültig,

$$\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \Delta x^\nu, \quad dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu. \quad (44)$$

- **Eigenzeit** (meistens mit τ bezeichnet): Zeit, die für einen Beobachter B (muss sich nicht mit einem Inertialsystem bewegen, d.h. kann beschleunigen und/oder abbremsen) vergeht, d.h. auf seiner mitgeführten Uhr angezeigt wird (Definition unabhängig vom System, d.h. Eigenzeit τ ist Lorentz-invariant).

- Bewegung von B in Σ' : $x_B^\mu = (ct', x'(t'))$.

Bild - 010



- Für infinitesimale Zeitspanne dt' hat B konstante Geschwindigkeit in Σ' ,

$$v'(t') = \frac{dx'(t')}{dt'}, \quad (45)$$

ruht also in relativ bewegtem Inertialsystem Σ (geboostet mit $v'(t')$ bezüglich Σ'), daher

$$dt' = \gamma dt \quad (46)$$

((35), Zeitdilatation); $d\tau = dt$, d.h. dt entspricht Beitrag zur Eigenzeit.

- Berechnung der Eigenzeit:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt' = \sqrt{1 - v'^2(t')/c^2} dt'$$

$$\rightarrow \tau = \tau_f - \tau_i = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau = \int_{t'_i}^{t'_f} dt' \sqrt{1 - v'^2(t')/c^2}, \quad (47)$$

wobei Indizes i und f Anfangs- und Endpunkt der Bewegung bezeichnen (initial, final).

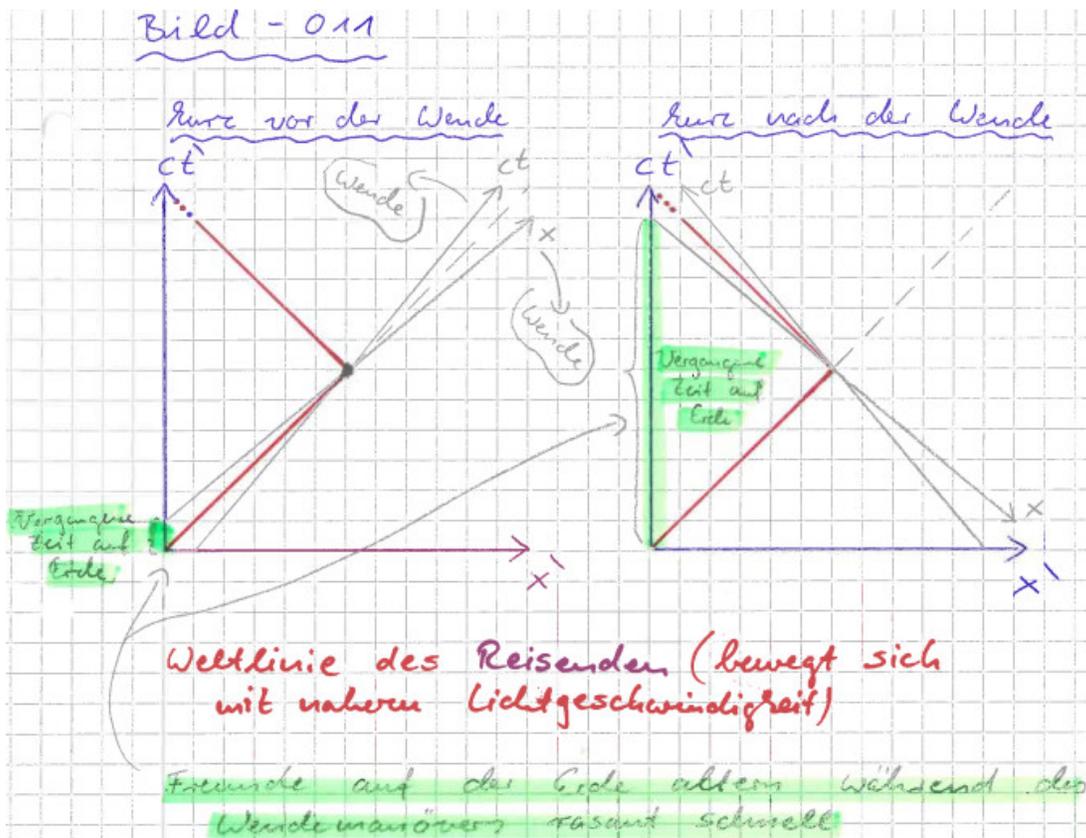
- Außerdem gilt

$$d\tau = \sqrt{1 - v'^2(t')/c^2} dt' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt'^2 - \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 dt'^2} = \frac{1}{c} \sqrt{dx'^\mu dx'_\mu}, \quad (48)$$

wobei $dx'^\mu dx'_\mu$ ein Produkt zweier Vierervektoren und damit Lorentz-invariant ist.

- Explizit gezeigt, dass $d\tau$ und damit Eigenzeit τ Lorentz-invariant ist.
- Eigenzeit entspricht zurückgelegter Entfernung in Raumzeit (nicht Euklidische Entfernung, sondern Entfernung berechnet mit Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$).

- **Zwillingsparadoxon** (kein Paradoxon, zumindest nicht für den gebildeten Physiker):
 - Bewegung mit nahezu Lichtgeschwindigkeit: Uhr des Reisenden steht aus Sicht des umgebenden Raums fast still, d.h. kein Altern des Reisenden, z.B. kann ein Mensch (Lebenserwartung ≈ 100 y) so problemlos zu einem 1000 ly entfernten Stern reisen (y = Jahr, ly = Lichtjahr).
 - Beispiel: Reise zu 1 ly entfernten Stern und zurück mit $v^2/c^2 = 0.99$:
 - * Auf Erde vergehen $\Delta t \approx 2$ y.
 - * Für Reisenden vergehen nur $\Delta\tau = (1/\gamma)\Delta t = \sqrt{1 - v^2/c^2}\Delta t \approx 0.14(2\text{ y}) \approx 3.4$ Monate, er ist also kaum gealtert, während seine Freunde 2 Jahre älter sind.
 - Aber: Zeit auf Erde vergeht aus Sicht des Reisenden auch langsamer, d.h. müssten bei umgekehrter Betrachtungsweise nicht die zurückgebliebenen Freunde auf der Erde weniger schnell gealtert sein? Widerspruch?
 - Nein, “gegenseitige Zeitdilatation” ((35) und (36)) gilt nur für Inertialsysteme:
 - * Beim Wendemanöver ist das System des Reisenden kein Inertialsystem.
 - * Durch Wendemanöver verändert sich die relative Ausrichtung der Koordinatenachsen der Inertialsysteme des Reisenden Σ (unterschiede Hin- und Rückfluginertialsystem) zum Erdinertialsystem Σ' . (“Zeit auf Erde vergeht rasant während des Wendemanövers.”)
 - * Besseres Verständnis durch Raumzeitdiagramme.



1.8 Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls

- Im Rahmen der SRT sinnvolle Gleichungen sehen in allen Inertialsystemen gleich aus, d.h. sind forminvariant unter Lorentz-Transformationen; sie können daher nur aus Lorentz-Skalaren (= Lorentz-invariante Größen), Lorentz-Vektoren (= Vierervektoren) und Lorentz-Tensoren (= Objekte, mit zwei oder mehr Lorentz-Indizes) aufgebaut sein.
- Ziel relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen BGI

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = m\frac{d}{dt}\mathbf{v} = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x} = \mathbf{F}. \quad (49)$$

- t ist keine Lorentz-Invariante, sondern eine Komponente des Vierervektors x^μ , d.h. t und ebenso d/dt sollten (ohne die verbleibenden drei anderen Komponenten) nicht in einer relativistischen Gleichung auftreten.
- \mathbf{x} ist kein Vierervektor, sondern nur ein Teil davon, die drei räumlichen Komponenten.

- Versuch: $t \rightarrow \tau$ (Eigenzeit statt Zeit) und $\mathbf{x} \rightarrow x^\mu$ (Raumzeitvektor statt Position).
- Damit relativistische Verallgemeinerung der Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{x} \rightarrow u^\mu = \frac{d}{d\tau}x^\mu \quad (50)$$

(**Vierergeschwindigkeit**).

- Interpretation der vier Komponenten durch Verwendung von $dt = \gamma d\tau$:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \gamma = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}). \quad (51)$$

- Die räumlichen Komponenten der Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} entsprechen nicht der Geschwindigkeit \mathbf{v} , sondern $\gamma \mathbf{v}$.
- Nicht-relativistischer Grenzfall: $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1 + \mathcal{O}((v/c)^2)$ und damit $u^\mu = (c, \mathbf{v})(1 + \mathcal{O}((v/c)^2))$, also $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$.
- $u^\mu u_\mu = c^2$,

* entweder durch explizites Ausrechnen,

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2, \quad (52)$$

* oder durch “einfaches Auswerten” in geschickt gewähltem Inertialsystem, dem mitbewegten System mit $\mathbf{v} = 0$, d.h. $\gamma = 1$ und $u^\mu = (c, 0)$,

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = c^2 \quad (53)$$

($u^\mu u_\mu$ ist Lorentz-invariant und damit in jedem Inertialsystem gleich).

- Damit relativistische Verallgemeinerung des Impulses:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\frac{d}{dt}\mathbf{x} \rightarrow p^\mu = mu^\mu = m\frac{d}{d\tau}x^\mu \quad (54)$$

(**Viererimpuls**).

– $p^\mu = (m\gamma c, m\gamma \mathbf{v})$.

– **Relativistische Energie-Impuls-Beziehung:**

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (55)$$

und damit

$$\begin{aligned} p^0 c &= \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + (m\gamma \mathbf{v})^2 / m^2 c^2} = mc^2 \sqrt{1 + \gamma^2 \mathbf{v}^2 / c^2} = \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 \mathbf{v}^2}{2c^2} + \mathcal{O}((v/c)^4) \right) = mc^2 \left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} + \mathcal{O}((v/c)^4) \right) \approx \\ &\approx mc^2 + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \end{aligned} \quad (56)$$

($\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + \mathcal{O}(x^2)$ und $\gamma = 1 + \mathcal{O}((v/c)^2)$ wurden verwendet); $m\mathbf{v}^2/2$ ist die nicht-relativistische kinetische Energie, daher Interpretation $p^0 = E/c$, wobei E die Energie bezeichnet,

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \quad , \quad (E/c)^2 = m^2 c^2 + \mathbf{p}^2. \quad (57)$$

– Energie eines ruhenden Teilchens: $E = mc^2$ (“Einsteins bekannte Formel”).

1.9 Relativistische BGI

- Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen BGI

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (58)$$

gemäß

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = m \frac{d}{d\tau} u^\mu = m \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu = K^\mu. \quad (59)$$

- Nicht-relativistische Kraft \mathbf{F} wird durch Vierervektor K^μ ersetzt (K^μ muss Vierervektor sein, da linke Seite [z.B. $d^2 x^\mu / d\tau^2$] Vierervektor ist und Gleichung sonst relativistisch nicht sinnvoll wäre).
- Bedingung an K^μ durch Multiplikation von (59) mit p_μ :

– Linke Seite:

$$p_\mu \frac{d}{d\tau} p^\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} p_\mu p^\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} m^2 c^2 = 0. \quad (60)$$

– Rechte Seite: $p_\mu K^\mu$.

– Damit Bedingung

$$0 = p_\mu K^\mu. \quad (61)$$

– Z.B. im Ruhesystem des Teilchen $p^\mu = (mc, 0)$ und damit $K^\mu = (0, \mathbf{K})$.

- Bedeutung der räumlichen Komponenten von K^μ :

- Newtonsche BGl (58) gilt für kleine Geschwindigkeiten, z.B. zu einem beliebigem Zeitpunkt t in einem mit der Geschwindigkeit $v(t)$ mitbewegten Inertialsystem Σ' (in diesem System hat das Teilchen Geschwindigkeit $v' = 0$):

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} x'^{\mu} = m \frac{d^2}{dt'^2} (ct', \mathbf{x}') = (0, \mathbf{F}). \quad (62)$$

- Vergleich von (59) und (62) führt zu $K'^{\mu} = (K'^0, \mathbf{K}') = (0, \mathbf{F})$.
- Die relativistische Kraft im Laborsystem ergibt sich durch Lorentz-Transformation, z.B. bei Bewegung des Teilchens in x -Richtung über

$$K^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} K'^{\nu} = (\mathcal{B}_x(v))^{\mu}_{\nu} K'^{\nu} = (+\gamma\beta F_x, +\gamma F_x, F_y, F_z). \quad (63)$$

1.10 Viererimpulserhaltung, relativistische Streuprozesse und Zerfälle

- Abgeschlossenes Vielteilchensystem in nicht-relativistischer Mechanik: Erhaltung des Gesamtimpulses,

$$\sum_j \mathbf{p}_j = \text{const} \quad (64)$$

(j : Teilchenindex; siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2015/16], Abschnitt 6.3).

- Relativistisches Analog: Erhaltung des Gesamtviererimpulses (**Viererimpulserhaltung**),

$$\sum_j p_j^{\mu} = \text{const} \quad (65)$$

(j : Teilchenindex; μ : Lorentz-Index).

- Wichtige Anwendung bei Streuprozessen,

$$A + B \rightarrow C_1 + C_2 + \dots, \quad (66)$$

und bei Zerfällen,

$$A \rightarrow B_1 + B_2 + \dots, \quad (67)$$

wobei A , $B_{(j)}$ und $C_{(j)}$ Teilchen bezeichnen.

- Einfaches Beispiel: Zerfall von einem Teilchen A in zwei Teilchen B und C ,

$$A \rightarrow B + C. \quad (68)$$

- Viererimpulserhaltung:

$$p_A^{\mu} = p_B^{\mu} + p_C^{\mu}. \quad (69)$$

- Diese vier Gleichungen schränken die möglichen Energien und Impulse der Teilchen A , B und C ein.

– Häufig zweckmäßig: “Quadrieren” von (69) und Auswerten in geeignetem Inertialsystem.

* Z.B.

$$p_{A,\mu}p_A^\mu = (p_B + p_C)_\mu(p_B + p_C)^\mu = p_{B,\mu}p_B^\mu + p_{C,\mu}p_C^\mu + 2p_{B,\mu}p_C^\mu \quad (70)$$

($p_{C,\mu}p_B^\mu = p_C^\nu \eta_{\nu\mu} p_B^\mu = p_C^\nu p_{B,\nu} = p_{B,\mu}p_C^\mu$) bzw. in kompakterer und übersichtlicherer Notation

$$\begin{aligned} p_A^2 &= p_B^2 + p_C^2 + 2p_B p_C \\ \rightarrow m_A^2 c^2 &= m_B^2 c^2 + m_C^2 c^2 + 2p_B p_C \\ \rightarrow p_B p_C &= \frac{(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2)c^2}{2} \end{aligned} \quad (71)$$

((55) wurde verwendet, d.h. $p^2 = m^2 c^2$ in jedem Inertialsystem); Auswerten im Ruhesystem von B ($p_B^\mu = (m_B c, 0)$, $p_C^\mu = (E_C/c, \mathbf{p}_C)$) liefert

$$E_C = \frac{(m_A^2 - m_B^2 - m_C^2)c^2}{2m_B}, \quad (72)$$

die Energie von C im Ruhesystem von B ; der Impulsbetrag von C im Ruhesystem von B lässt sich über die relativistische Energie-Impuls-Beziehung (57) bestimmen,

$$|\mathbf{p}_C| = \sqrt{E_C^2/c^2 - m_C^2 c^2}. \quad (73)$$

* Will man Aussagen im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens A treffen ($p_A^\mu = (m_A c, 0)$, $p_B^\mu = (E_B/c, \mathbf{p}_B)$), muss (69) vor dem Quadrieren umgestellt werden,

$$\begin{aligned} p_A^\mu - p_B^\mu &= p_C^\mu \\ p_A^2 + p_B^2 - 2p_A p_B &= p_C^2 \\ \rightarrow m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2p_A p_B &= m_C^2 c^2 \\ \rightarrow p_A p_B &= \frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)c^2}{2} \\ \rightarrow E_B &= \frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)c^2}{2m_A} \\ \rightarrow |\mathbf{p}_B| &= \sqrt{E_B^2/c^2 - m_B^2 c^2}; \end{aligned} \quad (74)$$

außerdem folgt im Ruhesystem von A aus (69)

$$E_C = E_A - E_B = m_A c^2 - E_B, \quad \mathbf{p}_C = -\mathbf{p}_B. \quad (75)$$

* Konkretes Beispiel aus der Elementarteilchenphysik: Ein ruhendes ρ -Meson ($m_\rho = 775 \text{ MeV}/c^2$) zerfällt in zwei Pionen ($m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$), $\rho \rightarrow \pi + \pi$.

· Die beiden entstandenen Pionen haben Energie

$$E_\pi = \frac{(m_\rho^2 + m_\pi^2 - m_\pi^2)c^2}{2m_\rho} = \frac{m_\rho c^2}{2} = 388 \text{ MeV} \quad (76)$$

und entgegengesetzten Impuls mit Betrag

$$|\mathbf{p}_\pi| = \sqrt{E_\pi^2/c^2 - m_\pi^2 c^2} = 362 \text{ MeV}/c \quad (77)$$

sowie Geschwindigkeit mit Betrag

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_\pi| &= m_\pi \gamma |\mathbf{v}_\pi| \\ \rightarrow |\mathbf{v}_\pi| &= \sqrt{\frac{\mathbf{p}_\pi^2}{m_\pi^2 c^2 + \mathbf{p}_\pi^2}} c = 0.93 \times c \end{aligned} \quad (78)$$

($m\gamma c = p^0 = E/c = \sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2}$ gemäß Abschnitt 1.8 wurde verwendet).

- Über die Impuls- und Geschwindigkeitsrichtungen kann keine Aussage getroffen werden.

2 Lagrange-Formalismus

- Wiki: “Der **Lagrange-Formalismus** ist in der Physik eine 1788 von Joseph Louis Lagrange eingeführte Formulierung der klassischen Mechanik, in der die Dynamik eines Systems durch eine einzige skalare Funktion, die Lagrange-Funktion, beschrieben wird. ... Aus der Lagrange-Funktion lassen sich die Bewegungsgleichungen mit den Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung bestimmen. Diese Betrachtungsweise vereinfacht viele physikalische Probleme, da sich, im Gegensatz zu der Newtonschen Formulierung der Bewegungsgesetze, im Lagrange-Formalismus Zwangsbedingungen relativ einfach durch ... die geeignete Wahl generalisierter Koordinaten berücksichtigen lassen. ...”
- Außerdem ist der Lagrange-Formalismus geradlinig auf fortgeschrittenere Theorien, z.B. Feldtheorien (Elektrodynamik, Quantenchromodynamik, Allgemeine Relativitätstheorie, etc.), anwendbar.

2.1 Prinzip der kleinsten Wirkung

- Pädagogische und unterhaltsame Einführung: Feynman Lectures, Volume 2, Chapter 19, “The Principle of Least Action”,
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_19.html.
- Betrachte im Folgenden ein nicht-relativistisches Teilchen (Position/Trajektorie $\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3) = (x, y, z)$, Masse m) in einem Potential $V(\mathbf{r})$ (also in einem konservativen Kraftfeld).

- **Lagrange-Funktion:**

$$L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = T - V. \tag{79}$$

- T : Kinetische Energie, d.h. hier $T = (m/2)\dot{\mathbf{r}}^2$.
- V : Potentielle Energie, d.h. hier $V = V(\mathbf{r})$.
- Explizite Zeitabhängigkeit selten, d.h. i.d.R. $L = L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$.
- L ist Funktion, bildet Parameter (d.h. Zahlen) $\dot{\mathbf{r}}(t)$ (nicht Funktion $\dot{\mathbf{r}}(t)$, sondern $\dot{\mathbf{r}}$ zu fester Zeit t), $\mathbf{r}(t)$ (nicht Funktion $\mathbf{r}(t)$, sondern \mathbf{r} zu fester Zeit t), t auf eine Zahl L ab.

- **Wirkung:**

$$S[\mathbf{r}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t). \tag{80}$$

- S ist **Funktional**, bildet Funktion $\mathbf{r}(t)$ auf eine Zahl S ab.

- **Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonsches Prinzip):**

- Von allen denkbaren Trajektorien vom Ort \mathbf{r}_i bei Zeit t_i zum Ort \mathbf{r}_f bei Zeit t_f ist in der Natur diejenige realisiert, die die Wirkung $S[\mathbf{r}]$ extremal (i.d.R. minimal) macht.

– Mathematisch ausgedrückt

$$\frac{\delta S}{\delta r^j(t)} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \text{ und alle } t \in (t_i, t_f) \quad (81)$$

(das sind die Bedingungen für ein Extremum von S).

– Äquivalent zu (81) ist

$$\delta S = 0, \quad (82)$$

da

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_j \frac{\delta S}{\delta r^j(t)} \delta r^j(t). \quad (83)$$

– Was bedeutet diese mathematische Schreibweise im Detail?

* 1-dimensionales Analogon:

· Funktion $S(r)$ (r ist eine Variable, keine Funktion).

· Bedingung für ein Extremum von S :

$$\frac{dS}{dr} = 0. \quad (84)$$

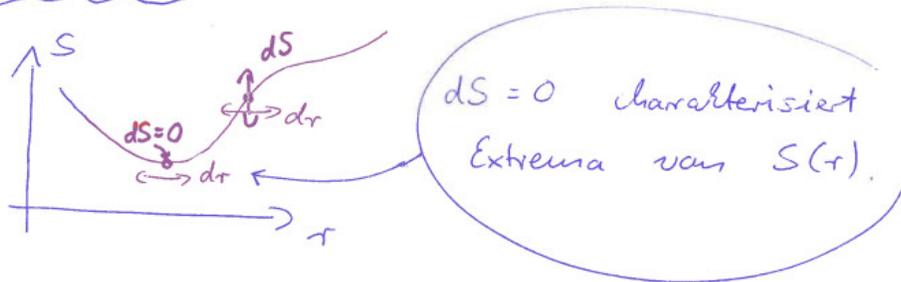
· Äquivalent zu (84) ist

$$dS = 0, \quad (85)$$

da

$$dS = \frac{dS}{dr} dr. \quad (86)$$

Bild - 012



* 3n-dimensionales Analogon:

· Funktion $S(r_k^j)$ (r_k^j [$j = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, n$] sind Variablen, keine Funktionen).

· Bedingungen für ein Extremum von S :

$$\frac{\partial S}{\partial r_k^j} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \text{ und } k = 1, 2, \dots, n. \quad (87)$$

· Äquivalent zu (87) ist

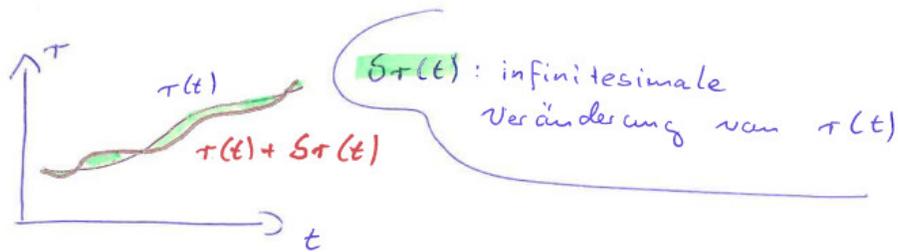
$$dS = 0, \quad (88)$$

da

$$dS = \sum_{k=1}^n \sum_j \frac{\partial S}{\partial r_k^j} dr_k^j. \quad (89)$$

- * "Kontinuierlicher Index" t in (81) und (83) ersetzt diskreten Index k in (87) und (89).
- * $\delta/\delta r^j(t)$ nennt man **Funktionalableitung**, entspricht der partiellen Ableitung von S nach der Funktion r^j zum festen Zeitpunkt t (nicht nach der vollständigen Funktion r^j).
- * Integral (= "Summe über kontinuierlichen Index") $\int_{t_i}^{t_f} dt$ in (83) ersetzt Summe $\sum_{k=1}^n$ in (89).
- * $\delta r^j(t)$ ist infinitesimale **Variation** der Funktion $r^j(t)$.

Bild - 013



- * Entsprechendes Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Minimierung/Maximierung von Funktionalen beschäftigt, heißt **Variationsrechnung**.

2.2 Variationsrechnung, Euler-Lagrange-Gleichungen

- Aufgabenstellung: Finde Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ mit $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f$, die Wirkung S (Gleichung (80)) extremal macht.
- Berechne dazu Veränderung δS bei Variation $\delta \mathbf{r}$, wobei \mathbf{r} an den Randpunkten t_i und t_f festgehalten wird, d.h. $\delta \mathbf{r}(t_i) = \delta \mathbf{r}(t_f) = 0$:

$$\delta S = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\mathbf{r}} + \delta \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) - \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) \quad (90)$$

($\delta \dot{\mathbf{r}} = (d/dt)\delta \mathbf{r}$, d.h. $\delta \dot{\mathbf{r}}$ und $\delta \mathbf{r}$ nicht unabhängig).

- Es gilt

$$L(\dot{\mathbf{r}} + \delta \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) = L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) + \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \delta \dot{r}^j + \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial r^j} \delta r^j. \quad (91)$$

- Damit

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \delta \dot{r}^j + \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial r^j} \delta r^j \right) = \\ &= \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \delta r^j \right)}_{= \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \delta r^j \Big|_{t=t_i}^{t=t_f} = 0} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left(- \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} + \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial r^j} \right) \delta r^j \end{aligned}$$

(zunächst partielle Integration, dann Einsetzen von $\delta r^j(t_i) = \delta r^j(t_f) = 0$).

- Da $\delta S = 0$ für beliebige $\delta \mathbf{r}$ gelten soll, folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^j} - \frac{\partial L}{\partial r^j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (92)$$

(d.h. eine DGL für jede Raumdimension), die sogenannten **Euler-Lagrange-Gleichungen** (im mathematischen Kontext) oder **Lagrange-Gleichungen** bzw. **Lagrangesche BGLs** (im physikalischen Kontext).

- $L = T - V$ mit

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \quad , \quad V = V(\mathbf{r}) \\ \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

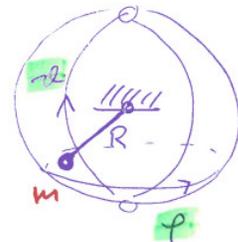
(es ergeben sich Newtonsche BGLs in 3 Raumdimensionen, d.h. Prinzip der kleinsten Wirkung mit $L = T - V$ ist äquivalent zu Newtonschen BGLs [falls Potential existiert, also Kräfte konservativ sind]).

2.3 Generalisierte Koordinaten

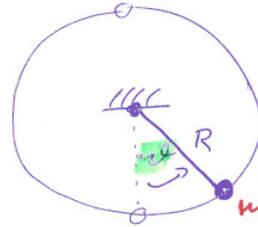
- Betrachte im Folgenden ein System von N Massenpunkten (Massen m_j , kartesische Koordinaten \mathbf{r}_j , $j = 1, \dots, N$).
- Häufig liegen \tilde{N} **Zwangsbedingungen** vor, z.B.
 - **Pendel** ($N = 1$, $\tilde{N} = 1$): $\mathbf{r}^2 = R^2$;
 - **ebenes Pendel** ($N = 1$, $\tilde{N} = 2$): $\mathbf{r}^2 = R^2$, $y = 0$;
 - **Doppelpendel** ($N = 2$, $\tilde{N} = 2$): $\mathbf{r}_1^2 = R_1^2$, $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = R_2^2$;
 - **Bewegung auf Schraubenlinie** (“gleitende Perle auf entsprechend gebogenem Draht”; $N = 1$, $\tilde{N} = 2$): $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \dots$ (hier sind die Zwangsbedingungen in kartesischen Koordinaten nicht einfach zu formulieren).

Bild - 014

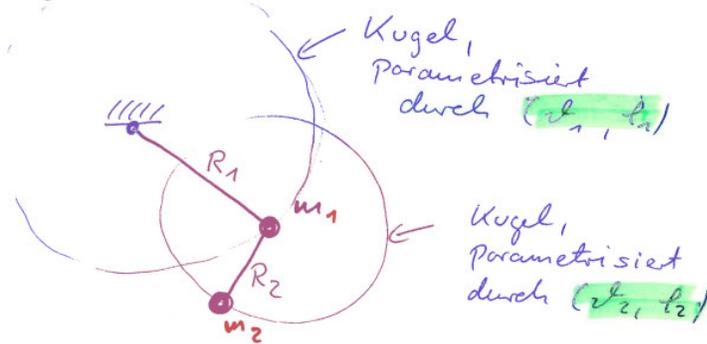
Pendel



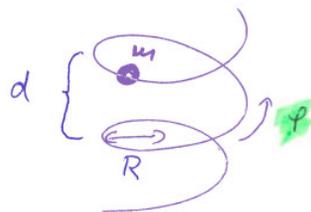
Ebenes Pendel



Doppelpendel



Schraubenlinie



- Lösen der Newtonschen BGLs in kartesischen Koordinaten bei vorliegenden Zwangsbedingungen i.d.R. schwierig.
- Zweckmäßig ist Übergang zu $f = 3N - \tilde{N}$ **generalisierten Koordinaten** q^1, \dots, q^f , definiert durch

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q^1, \dots, q^f) \quad , \quad j = 1, \dots, N, \quad (94)$$

die Positionen der Massenpunkte vollständig beschreiben und gleichzeitig sicherstellen, dass Zwangsbedingungen erfüllt sind (f ist Anzahl der **Freiheitsgrade** des Systems).

- Mögliche generalisierte Koordinaten für obige Beispiele:

– **Pendel** ($f = 2$), $(q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi)$:

$$x = R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \quad , \quad y = R \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \quad , \quad z = -R \cos(\vartheta) \quad (95)$$

(Kugelkoordinaten mit $r = R = \text{const}$; Pendelbewegung entspricht Bewegung auf Kugel­fläche).

– **Ebenes Pendel** ($f = 1$), $q^1 = \vartheta$:

$$x = R \sin(\vartheta) \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = -R \cos(\vartheta) \quad (96)$$

(Polarkoordinaten mit $r = R = \text{const}$; ebene Pendelbewegung entspricht Bewegung auf Kreislinie).

– **Doppelpendel** ($f = 4$), $(q^1, \dots, q^4) = (\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \sin(\vartheta_1) \cos(\varphi_1) \\ y_1 &= R_1 \sin(\vartheta_1) \sin(\varphi_1) \\ z_1 &= -R_1 \cos(\vartheta_1) \\ x_2 &= x_1(\vartheta_1, \varphi_1) + R_2 \sin(\vartheta_2) \cos(\varphi_2) \\ y_2 &= y_1(\vartheta_1, \varphi_1) + R_2 \sin(\vartheta_2) \sin(\varphi_2) \\ z_2 &= z_1(\vartheta_1, \varphi_1) - R_2 \cos(\vartheta_2). \end{aligned} \quad (97)$$

– **Bewegung auf Schraubenlinie** ($f = 1$), $q^1 = \varphi$:

$$x = R \cos(\varphi) \quad , \quad y = R \sin(\varphi) \quad , \quad z = \frac{\varphi}{2\pi} d. \quad (98)$$

- Wahl generalisierter Koordinaten nicht eindeutig; z.B. könnte man in (95) an Stelle von $z = -R \cos(\vartheta)$ auch $z = +R \cos(\vartheta)$ wählen oder (falls Bewegung nur auf unterer Halbkugel stattfindet) statt Kugelkoordinaten $(q^1, q^2) = (x, y)$ mit

$$x = x \quad , \quad y = y \quad , \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (99)$$

- Physikalische Ergebnisse unabhängig von Wahl generalisierter Koordinaten, Lösung der zugehörigen BGLs (siehe Abschnitt 2.4) bei geschickter Koordinatenwahl oft sehr einfach.
- Die in “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (WiSe 2015/16), Kapitel 7 eingeführten krummlinigen Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten können ebenfalls als generalisierte Koordinaten betrachtet werden (dann $\tilde{N} = 0$ und $f = 2N$ [Polarkoordinaten] bzw. $f = 3N$ [Zylinder- und Kugelkoordinaten]).

2.4 Euler-Lagrange-Gleichungen für generalisierte Koordinaten

- Bei Lösung des Variationsproblems in Abschnitt 2.2 (Minimierung des Wirkungsfunktional, Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen) wurde nicht benutzt, dass $\mathbf{r} = r^j = (x, y, z)$, also \mathbf{r} drei kartesische Koordinaten beschreibt; (92) gilt für beliebige Anzahl und Art von Koordinaten $r^j \rightarrow q^j$, $j = 1, \dots, f$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, f. \quad (100)$$

- Nach Wahl geeigneter generalisierter Koordinaten q^j und Ausdrücken der Lagrange-Funktion $L = T - V$ durch \dot{q}^j und q^j , können BGLs (in die existierende Zwangsbedingungen bereits integriert sind) in nahezu trivialer Weise gewonnen werden (einfaches Ableiten gemäß (100)).
- Beispiele:

– **Bewegung in 1 Raumdimension, $q^1 = x$,**

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2}\dot{x}^2, \quad V = V(x) \quad \rightarrow \quad L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) \\
 \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{101}$$

(wie erwartet ergibt sich Newtonsche BGL in 1 Raumdimension).

– **Bewegung in 2 Raumdimensionen, Polarkoordinaten, $(q^1, q^2) = (r, \varphi)$,**

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad V = V(r, \varphi) \quad \rightarrow \quad L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r, \varphi) \\
 \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \\
 \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} mr^2\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mr^2\ddot{\varphi} + 2mrr\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0
 \end{aligned} \tag{102}$$

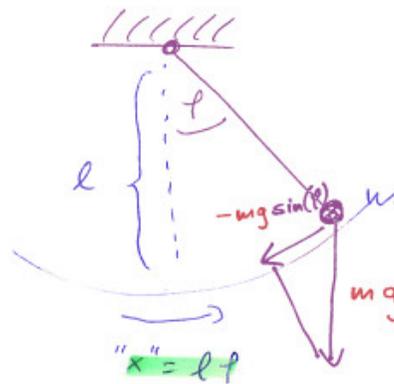
(T in Polarkoordinaten: siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2015/16], Abschnitt 7.1).

– **Ebenes Pendel im homogenen Gravitationsfeld, $q^1 = \vartheta$ (siehe Abschnitt 2.3),**

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2, \quad V = mgz = -mgR \cos(\vartheta) \quad \rightarrow \\
 \rightarrow \quad L &= \frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2 + mgR \cos(\vartheta) \\
 \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= 0 \quad \rightarrow \quad mR^2\ddot{\vartheta} + mgR \sin(\vartheta) = 0 \quad \rightarrow \\
 \rightarrow \quad \ddot{\vartheta} &= -\frac{g}{R} \sin(\vartheta).
 \end{aligned} \tag{103}$$

Bild - 015

"Newton'sche Überlegungen":



→ Newton'sche BGL:

$$m \ddot{x} = F$$

$$\rightarrow m l \ddot{\varphi} = -mg \sin(\varphi)$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi)$$

... o.k., konsistent mit
Lagrange BGL.

- BGLs sind jeweils Systeme von f gewöhnlichen gekoppelten DGLs 2-ter Ordnung, genau wie Newton'sche BGLs, damit analoges Vorgehen beim Lösen:
 - (1) Allgemeine Lösung finden (muss $2f$ frei wählbare unabhängige Konstanten enthalten).
 - (2) Unabhängige Konstanten so wählen, dass $2f$ ABs erfüllt sind (diese sind durch Aufgabenstellung vorgegeben), z.B. $q^j(t=0) = q_0^j$, $\dot{q}^j(t=0) = \dot{q}_0^j$, $j = 1, \dots, f$.
- Vorteile des Lagrange-Formalismus gegenüber Newton'scher Formulierung der Mechanik:
 - Vergleichsweise einfaches Aufstellen von BGLs bei Zwangsbedingungen und/oder krummlinigen Koordinaten.
 - Lagrange-Formalismus sehr universell, z.B. auch für Feldtheorien wie Elektrodynamik oder QCD anwendbar.

Siehe auch Anfang von Kapitel 2.

2.5 Zusammenfassung und Beispiele

- Typisches Vorgehen bei Lösung von Mechanik-Problemen mit Lagrange-Formalismus:
 - (1) Geeignete generalisierte Koordinaten q^j wählen.
 - (2) Kinetische Energie T durch generalisierte Koordinaten ausdrücken.
 - (3) Potentielle Energie V durch generalisierte Koordinaten ausdrücken.
 - (4) Lagrange-Funktion niederschreiben, $L = T - V$.
 - (5) BGLs über Euler-Lagrange-Gleichungen (100), d.h. durch Ableiten bestimmen.
 - (6) BGLs lösen (zunächst allgemeine Lösung, dann Anpassen der unbestimmten Konstanten an gegebene ABs).
 - (7) Lösungen checken und diskutieren (einfache und/oder bekannte Grenzfälle studieren, Kernaussagen der erhaltenen Lösungen in Worte fassen, etc.).

2.5.1 Massenpunkt auf rotierender Stange

- Stange rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in x - y -Ebene um ihr Zentrum, Massenpunkt (Masse m) gleitet auf dieser Stange.
- Generalisierte Koordinate $q^1 = r$ (Abstand vom Zentrum der Stange/Rotation),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix} \\
 \rightarrow \dot{\mathbf{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{r} \cos(\omega t) - r\omega \sin(\omega t) \\ \dot{r} \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\
 \rightarrow L = T &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2). \tag{104}
 \end{aligned}$$

- BGL über Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - m\omega^2 r = 0 \rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r \tag{105}$$

(Interpretation: $m\omega^2 r$ ist Zentrifugalkraft).

- Allgemeine Lösung:

$$r = Ae^{+\omega t} + Be^{-\omega t} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{r} = \left(Ae^{+\omega t} + Be^{-\omega t} \right) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{106}$$

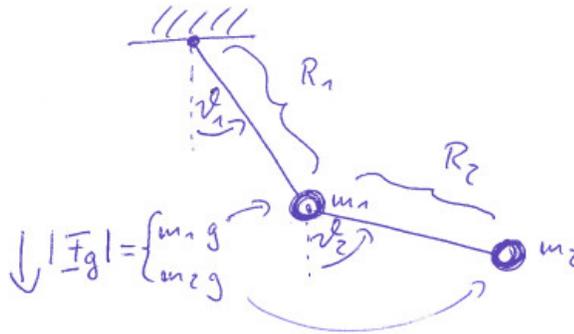
2.5.2 Ebenes Doppelpendel im homogenen Gravitationsfeld

- Generalisierte Koordinaten $(q^1, q^2) = (\vartheta_1, \vartheta_2)$,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} +R_1 \sin(\vartheta_1) \\ -R_1 \cos(\vartheta_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \begin{pmatrix} +R_2 \sin(\vartheta_2) \\ -R_2 \cos(\vartheta_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \dot{\mathbf{r}}_1 &= \begin{pmatrix} +R_1 \cos(\vartheta_1) \dot{\vartheta}_1 \\ +R_1 \sin(\vartheta_1) \dot{\vartheta}_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \begin{pmatrix} +R_2 \cos(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 \\ +R_2 \sin(\vartheta_2) \dot{\vartheta}_2 \end{pmatrix} \\
\rightarrow L = T - V &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2 = \\
&= \frac{m_1}{2} R_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left(R_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + R_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2R_1 R_2 \underbrace{\left(\cos(\vartheta_1) \cos(\vartheta_2) + \sin(\vartheta_1) \sin(\vartheta_2) \right)}_{=\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \right) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \\
&\quad + m_1 g R_1 \cos(\vartheta_1) + m_2 g \left(R_1 \cos(\vartheta_1) + R_2 \cos(\vartheta_2) \right) = \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2} R_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{m_2}{2} R_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + m_2 R_1 R_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \\
&\quad + (m_1 + m_2) g R_1 \cos(\vartheta_1) + m_2 g R_2 \cos(\vartheta_2). \tag{107}
\end{aligned}$$

Bild 16



- BGls über Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_1} &= 0 \rightarrow \dots \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_2} &= 0 \rightarrow \dots \tag{108}
\end{aligned}$$

2.6 Bewegung in gekrümmten Räumen oder beschrieben durch krummlinige Koordinaten

- Betrachte 1 Massenpunkt, der sich in gekrümmtem Raum (typischer Weise auf gekrümmter Fläche, z.B. Kugelfläche) bewegt oder dessen Bewegung durch krummlinige Koordinaten (z.B. Kugelkoordinaten) beschrieben wird.
- Alles Folgende geradlinig auch auf mehrere Massenpunkte verallgemeinerbar.
- Kinetische Energie eines Massenpunkts in kartesischen Koordinaten:

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2. \tag{109}$$

- Kinetische Energie eines Massenpunkts in generalisierten Koordinaten:

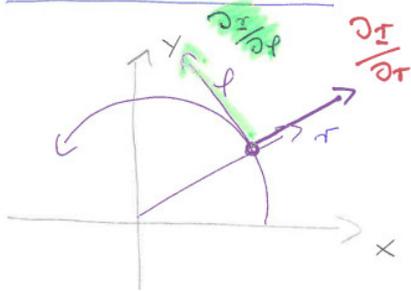
$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \dot{q}^j \right)^2 = \frac{m}{2} \dot{q}^j \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} \right)}_{=g_{jk}} \dot{q}^k = \frac{m}{2} \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k \quad (110)$$

(\mathbf{r} ist Funktion von q^1, \dots, q^f gemäß (94)); g_{jk} wird als **metrischer Tensor** bzw. **Metrik** bezeichnet.

- Vektoren $\partial \mathbf{r} / \partial q^j$ zeigen entlang der Koordinatenlinien von q^j , sind Tangenten an die gekrümmte Fläche/den gekrümmten Raum.
- Diagonalelement g_{jj} : Beschreibt die Verzerrung der generalisierten Koordinate q^j bezüglich der kartesischen Koordinaten, d.h. wird eine Einheit in der Koordinate q^j durchlaufen, entspricht dies $\sqrt{g_{jj}}$ Einheiten in kartesischen Koordinaten.
- Off-Diagonalelement g_{jk} : Falls $g_{jk} = 0$, stehen q^j - und q^k -Koordinatenlinien senkrecht.
- Metrischer Tensor enthält somit Informationen über Abstände und Krümmung von generalisierten Koordinaten und des von ihnen parametrisierten (eventuell gekrümmten) Raums.

Bild 17

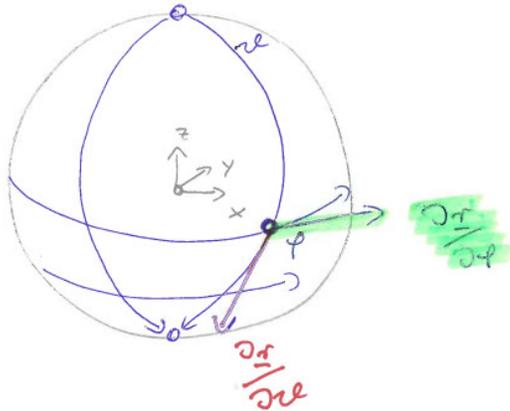
Polar Koordinaten



$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Kugel fläche (Radius R)

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ R \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ R \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$



- $g_{jk} = g_{kj}$, d.h. symmetrisch bezüglich $j \leftrightarrow k$.
- **Linielement** ds^2 ist infinitesimaler quadratischer Abstand; im 3-dimensionalen Euklidischen Raum in kartesischen Koordinaten

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\mathbf{r}^2. \quad (111)$$

- Linielement in generalisierten Koordinaten:

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} dq^j \right)^2 = dq^j g_{jk} dq^k, \quad (112)$$

d.h. der zu einem Satz generalisierter Koordinaten gehörige metrische Tensor erlaubt das Ausdrücken von Abständen durch diese Koordinaten.

- Anwendung: Länge einer Kurve beschrieben durch generalisierte Koordinaten, $(q^1(\lambda), \dots, q^f(\lambda))$, $\lambda_A \leq \lambda \leq \lambda_B$,

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{ds^2} = \int_A^B \sqrt{dq^j g_{jk} dq^k} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}}. \quad (113)$$

- Beispiel: Generalisierte Koordinaten $(q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi)$, die gemäß

$$x = R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \quad , \quad y = R \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \quad , \quad z = R \cos(\vartheta) \quad (114)$$

Kugelfläche mit Radius R parametrisieren.

- Metrischer Tensor:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = R \begin{pmatrix} + \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ + \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ - \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} - \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ + \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow g_{11} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = R^2$$

$$\rightarrow g_{22} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R^2 \sin^2(\vartheta)$$

$$\rightarrow g_{12} = g_{21} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\rightarrow g_{jk} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

- Kinetische Energie eines Massenpunkts:

$$T = \frac{m}{2} \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2). \quad (115)$$

- Linienelement:

$$ds^2 = dq^j g_{jk} dq^k = R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2). \quad (116)$$

- Betrachte Kurve, die um Äquator verläuft, $(q^1(\lambda), q^2(\lambda)) = (\vartheta(\lambda), \varphi(\lambda)) = (\pi/2, \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$; Länge der Kurve ist offensichtlich $2\pi R$, muss durch Verwendung von (113) und Rechnung reproduziert werden,

$$s = \int_0^{2\pi} d\lambda \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}} = \int_0^{2\pi} d\lambda \sqrt{g_{22}} = \int_0^{2\pi} d\lambda R = 2\pi R \quad (117)$$

... o.k.

- Es empfiehlt sich Standard-Metriken einmalig herzuleiten und auswendig zu lernen, z.B. für Polar-, Zylinder, und Kugelkoordinaten.
- Trivialer Spezialfall: Metrik des 3-dimensionalen Euklidischen Raums, kartesische Koordinaten $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} = \mathbf{e}_j \quad , \quad g_{jk} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (118)$$

diese Metrik ist (bis auf umgekehrtes globales Vorzeichen) Teil der aus Kapitel 1 bekannten Minkowski-Metrik,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (119)$$

(rechte untere 3×3 -Matrix).

2.6.1 Parallelen zur Metrik und oberen und unteren Indizes in SRT

- Abschnitt ist als Ausblick zu verstehen; tieferes Verständnis durch Vorlesungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie (Physik) oder Differentialgeometrie (Mathematik).
- \dot{q}^j und dq^j haben ähnlichen Stellenwert wie Vierervektoren in SRT (z.B. u^μ , dx^μ).
- Unter Koordinatentransformationen $q^j \rightarrow q'^j = q'^j(q^1, \dots, q^f)$, also Übergang von einem Satz generalisierter Koordinaten q^j zu anderem Satz generalisierter Koordinaten q'^j , transformieren sich \dot{q}^j und dq^j gemäß

$$\dot{q}'^j = \frac{dq'^j}{dt} = \underbrace{\frac{\partial q'^j}{\partial q^k}}_{=a^j_k} \frac{dq^k}{dt} = a^j_k \dot{q}^k \quad (120)$$

$$dq'^j = \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} dq^k = a^j_k dq^k; \quad (121)$$

dies ist ähnlich zu Lorentz-Transformationen von Vierervektoren in SRT, z.B. $dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$; a^j_k ist aber im Gegensatz zu Λ^μ_ν keine konstante "Matrix", sondern hängt im Allgemeinen von den generalisierten Koordinaten ab.

- Aus

$$\underbrace{\frac{\partial q^j}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial q^l}}_{=a^k_l} = \frac{\partial q^j}{\partial q^l} = \delta_{jl} \quad (122)$$

folgt

$$(a^{-1})^j_k = \frac{\partial q^j}{\partial q'^k}. \quad (123)$$

- Während sich die Minkowski-Metrik unter Lorentz-Transformationen nicht verändert, transformiert sich die Metrik g_{jk} unter Koordinatentransformationen gemäß

$$g'_{jk} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q'^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q'^k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^m} \frac{\partial q^l}{\partial q'^j} \frac{\partial q^m}{\partial q'^k} = g_{lm} (a^{-1})^l_j (a^{-1})^m_k; \quad (124)$$

diese Gleichung ist das Analogon zur definierenden Eigenschaft von Lorentz-Transformationen (Gleichung (10)),

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \\ \rightarrow \eta_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta &= \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (125)$$

- Wie bei Vierervektoren in SRT (z.B. u^μ und dx^μ) können bei \dot{q}^j und dq^j Indizes mit der Metrik nach unten gezogen werden (obere Indizes = kontravariant; untere Indizes = kovariant); dazu definiert man

$$\dot{q}_j = g_{jk} \dot{q}^k, \quad dq_j = g_{jk} dq^k. \quad (126)$$

- Wird über einen oberen und einen unteren Index summiert, ist die Summe invariant unter Koordinatentransformationen, z.B.

$$\dot{q}^j \dot{q}'_j = \dot{q}^j g'_{jk} \dot{q}'^k = \underbrace{(a^{-1})^r{}_j a^j{}_m}_{=\delta_{rm}} \underbrace{(a^{-1})^s{}_k a^k{}_n}_{=\delta_{sn}} \dot{q}^m g_{rs} \dot{q}'^n = \dot{q}^m g_{mn} \dot{q}'^n = \dot{q}^m \dot{q}'_m \quad (127)$$

und analog

$$ds'^2 = dq'^j dq'_j = dq'^j g'_{jk} dq'^k = \dots = dq^m g_{mn} dq^n = dq^m dq_m = ds^2; \quad (128)$$

die kinetische Energie sowie Abstände (beides physikalisch messbare Größen) sind damit unabhängig von gewählten generalisierten Koordinaten (wie man es erwartet bzw. es sein muss).

2.6.2 Kräftefreie Bewegung

- Gesucht: BGLs eines Massenpunkts, der sich ohne Einfluss von Kräften in gekrümmtem Raum (z.B. bei $f = 2$ auf gekrümmter Fläche) bewegt.
- Lagrange Funktion:

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k. \quad (129)$$

- Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0 \quad (130)$$

liefern BGLs:

- Ableiten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} &= m g_{lk} \dot{q}^k \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} &= m \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} \dot{q}^m \dot{q}^k + m g_{lk} \ddot{q}^k \\ \frac{\partial L}{\partial q^l} &= \frac{m}{2} \dot{q}^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \dot{q}^k.\end{aligned}\quad (131)$$

- Definiere inverse Metrik g^{jk} via $g^{jk}g_{kl} = \delta_{jl}$ (analog zu SRT, $\eta^{\mu\nu}$ invers zu $\eta_{\mu\nu}$), Multiplikation mit g^{jl}/m :

$$\begin{aligned}\frac{g^{jl}}{m}m g_{lk}\ddot{q}^k &= \ddot{q}^j \\ \frac{g^{jl}}{m}m \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m}\dot{q}^m\dot{q}^k &= \frac{g^{jl}}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k}\right)\dot{q}^k\dot{q}^m \\ \frac{g^{jl}}{m}\frac{m}{2}\dot{q}^m\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l}\dot{q}^k &= \frac{g^{jl}}{2}\frac{\partial g_{km}}{\partial q^l}\dot{q}^k\dot{q}^m.\end{aligned}\quad (132)$$

- Insgesamt:

$$\ddot{q}^j = -\underbrace{\frac{g^{jl}}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial q^l}\right)}_{=\Gamma_{km}^j}\dot{q}^k\dot{q}^m = -\Gamma_{km}^j\dot{q}^k\dot{q}^m \quad (133)$$

($\Gamma_{kl}^j = \Gamma_{lk}^j$, d.h. symmetrisch in den beiden unteren Indizes, werden als **Christoffel-Symbole** bezeichnet).

- Triviales Beispiel: 2-dimensionaler Euklidischer Raum, kartesische Koordinaten $(q^1, q^2) = (x, y)$,

$$\begin{aligned}g_{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \Gamma_{kl}^j &= 0 \\ \rightarrow \ddot{x} &= 0 \quad , \quad \ddot{y} = 0.\end{aligned}\quad (134)$$

- Beispiel: 2-dimensionaler Euklidischer Raum, Polarkoordinaten $(q^1, q^2) = (r, \varphi)$ gemäß $\mathbf{r} = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \begin{pmatrix} +\cos(\varphi) \\ +\sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ +r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ \rightarrow g_{rr} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = 1 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r^2 \quad , \\ g_{r\varphi} &= g_{\varphi r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 0 \\ \rightarrow g_{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow g^{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \Gamma_{rr}^r &= 0 \quad , \quad \Gamma_{r\varphi}^r = \Gamma_{\varphi r}^r = 0 \quad , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{g^{rr}}{2}\left(-\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right) = -r \quad , \\ \Gamma_{rr}^\varphi &= 0 \quad , \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{g^{\varphi\varphi}}{2}\left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right) = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0 \\ \rightarrow \ddot{\mathbf{r}} &= -\Gamma_{\varphi\varphi}^r \dot{\varphi}\dot{\varphi} = r\dot{\varphi}^2 \quad , \quad \ddot{\varphi} = -\Gamma_{r\varphi}^\varphi \dot{r}\dot{\varphi} - \Gamma_{\varphi r}^\varphi \dot{\varphi}\dot{r} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi};\end{aligned}\quad (135)$$

häufig ist das Aufstellen der BGs mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen jedoch einfacher, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \\
\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 \\
\rightarrow \ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 \\
\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt} mr^2\dot{\varphi} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\
\rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{136}$$

2.6.3 Geodätengleichung, ein weiteres Variationsproblem

- Gesucht: Kürzester Weg zwischen zwei Punkten q_A^j und q_B^j in einem durch Metrik g_{jk} beschriebenen gekrümmten Raum (z.B. bei $f = 2$ auf gekrümmter Fläche). Man nennt diesen Weg **Geodäte**.
- Länge einer durch $\lambda_A \leq \lambda \leq \lambda_B$ parametrisierten Kurve $q^j(\lambda)$ von $q^j(\lambda_A) = q_A^j$ nach $q^j(\lambda_B) = q_B^j$ gegeben durch (113),

$$s[q] = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}}. \tag{137}$$

- Dieses Kurvenlängenfunktional hat gleiche Struktur, wie Wirkungsfunktional (80): Der Integrand hängt von Funktionen und deren ersten Ableitungen ab; definiert man

$$L(\dot{q}^j, q^j) = \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}}, \tag{138}$$

wobei λ mit t identifiziert wird, d.h. $\dot{q}^j = dq^j/d\lambda$, erhält man mit Euler-Lagrange-Gleichungen (100),

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0, \tag{139}$$

die Bestimmungsgleichungen für die Geodäte.

- Um die die Geodäte beschreibende Kurve $q^j(\lambda)$ eindeutig festzulegen, muss eine Bedingung an deren Parametrisierung gestellt werden (Veränderung der Durchlaufgeschwindigkeit der Kurve verändert deren Form nicht); zweckmäßig ist Parametrisierung proportional zur Bogenlänge, d.h. konstante Durchlaufgeschwindigkeit, mathematisch beschrieben durch

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{\frac{dq^j}{d\lambda} g_{jk} \frac{dq^k}{d\lambda}} = \text{const (bezüglich } \lambda). \tag{140}$$

- Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} &= \frac{1}{\sqrt{\dots}} g_{lk} \dot{q}^k \\
\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} &= \frac{1}{\sqrt{\dots}} \frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} \dot{q}^m \dot{q}^k + \frac{1}{\sqrt{\dots}} g_{lk} \ddot{q}^k \\
\frac{\partial L}{\partial q^l} &= \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \dot{q}^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \dot{q}^k;
\end{aligned} \tag{141}$$

nach Umformung (im Wesentlichen Multiplikation mit $\sqrt{\dots} g^{jl}$) und Zusammenfassung der Terme erhält man dieselben Gleichungen, wie für eine kräftefreie Bewegung,

$$\ddot{q}^j = -\frac{g^{jl}}{2} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial q^l} \right) \dot{q}^k \dot{q}^m = -\Gamma_{km}^j \dot{q}^k \dot{q}^m \tag{142}$$

(Gleichung (133); wird auch als **Geodätengleichung** bezeichnet).

- Bedingung an Parametrisierung (140) muss nicht als zusätzliche Gleichung behalten werden, da sie in (142) enthalten ist, wie folgende Rechnung zeigt:

- Bedingung (140):

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left(\dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k \right) = 2\dot{q}^j g_{jk} \ddot{q}^k + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \dot{q}^j \dot{q}^k \dot{q}^l. \tag{143}$$

- Geodätengleichung (142), Multiplikation mit $2\dot{q}^n g_{nj}$:

$$2\dot{q}^n g_{nj} \ddot{q}^j = -2\dot{q}^n g_{nj} \frac{g^{jl}}{2} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial q^l} \right) \dot{q}^k \dot{q}^m = -\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^m} \dot{q}^l \dot{q}^k \dot{q}^m, \tag{144}$$

also Linearkombination der Komponenten der Geodätengleichung identisch zu Bedingung (140) bzw. (143) (alle Indizes sind Summationsindizes, können umbenannt werden).

- Schlussfolgerungen:

- Teilchen, auf die keine Kräfte wirken, bewegen sich entlang von Geodäten.
- Aufgrund von $ds/d\lambda = \text{const}$ (wird zu $ds/dt = \text{const}$ bei kräftefreier Bewegung) ist dabei der Geschwindigkeitsbetrag konstant.

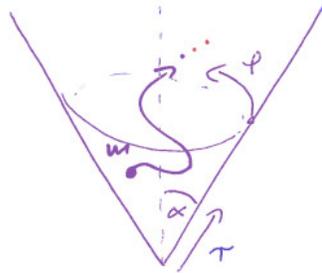
2.6.4 Abschließendes Beispiel: Bewegung auf Kegelfläche im homogenen Schwerfeld der Erde

- Generalisierte Koordinaten $(q^1, q^2) = (r, \varphi)$,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ r \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ r \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \begin{pmatrix} +\sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ +\sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ +\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ +r\sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\rightarrow g_{rr} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r^2 \sin^2(\alpha), \\
g_{r\varphi} &= g_{\varphi r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 0 \\
\rightarrow g_{jk} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \\
\rightarrow L = T - V &= \frac{m}{2} \dot{q}^j g_{jk} \dot{q}^k - mgz = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2) - mgr \cos(\alpha).
\end{aligned} \tag{145}$$

Bild - 018



Teilchenbahn
auf Kegelfläche

$$\downarrow |\underline{F}_g| = mg$$

- BGls über Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= m\ddot{r} - mr \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2 + mg \cos(\alpha) = 0 \\
\rightarrow \ddot{r} &= r \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2 - g \cos(\alpha) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}) = 0 \\
\rightarrow mr^2 \dot{\varphi} &= \text{const} \quad (\text{Erhaltung der } z\text{-Komponente des Drehimpulses})
\end{aligned} \tag{146}$$

(hängt L nur von \dot{q}^j aber nicht von q^j ab, ist es zweckmäßig für zugehörige BGl die Ableitung d/dt nicht auszuführen; man hat so unmittelbar eine Erhaltungsgröße identifiziert und die BGl ist nur von 1-ter Ordnung, nicht von 2-ter Ordnung [mehr dazu im folgenden Kapitel]).

2.7 Erhaltungsgrößen, Symmetrien, Noether-Theorem

2.7.1 Zyklische Variablen und Erhaltungsgrößen

- Hängt Lagrange-Funktion nur von \dot{q}^j , nicht aber von q^j ab, d.h. $\partial L / \partial q^j = 0$, bezeichnet man q^j als **zyklische Variable**.
- Mit zyklischer Variable q^j ist stets in offensichtlicher Weise eine Erhaltungsgröße I verbunden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^j}}_{=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = 0 \quad (147)$$

d.h.

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = \text{const} \quad (148)$$

(z.B. ist φ in Abschnitt 2.6.4 zyklische Variable, zugehörige Erhaltungsgröße ist $I = mr^2\dot{\varphi} = \text{const} = l_z$).

- (148) (eine DGl 1. Ordnung) ersetzt die Euler-Lagrange-Gleichung (147) (eine DGl 2. Ordnung), d.h. i.d.R. nicht hilfreich Zeitableitung in (147) auszuführen.
- Beispiel: Freies Teilchen in 1 Raumdimension, $L = T - V = (m/2)\dot{x}^2$.

- L hängt nicht von x ab
→ x ist zyklische Variable.
- Zugehörige Erhaltungsgröße: $I = \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x} = \text{const} = p$ (Impulserhaltung).
- Verwende nicht Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x}}_{=0} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} = 0 \quad (149)$$

(DGl 2. Ordnung), sondern $m\dot{x} = \text{const} = p$ (DGl 1. Ordnung) als BGl, d.h. um Trajektorie zu bestimmen.

- Beispiel: Teilchen in 2 Raumdimensionen in rotationssymmetrischem Potential, Polarkoordinaten, $L = T - V = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$.

- L hängt nicht von φ ab
→ φ ist zyklische Variable.
- Zugehörige Erhaltungsgröße: $I = \partial L / \partial \dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$ (I entspricht dem Drehimpuls l).
- Verwende nicht Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = \frac{d}{dt} mr^2\dot{\varphi} = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (150)$$

(DGl 2. Ordnung), sondern $mr^2\dot{\varphi} = \text{const} = l$ (DGl 1. Ordnung) als eine der beiden BGls, d.h. um Trajektorie zu bestimmen.

2.7.2 Noether-Theorem

- Grundidee:
 - Symmetrien bei vorliegender Lagrange-Funktion oft leicht zu sehen:
 - * Z.B. **Translationssymmetrie**,
 $L = (m/2)\dot{\mathbf{r}}^2$ unverändert bei $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$
 $(\mathbf{r}_0$ beliebiger zeitunabhängiger Vektor).
 - * Z.B. **Rotationssymmetrie**,
 $L = (m/2)\dot{\mathbf{r}}^2 - V(|\mathbf{r}|)$ unverändert bei $\mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r}$
 $(R$ beliebige zeitunabhängige Rotationsmatrix).
 - Erhaltungsgrößen meist sehr viel schwieriger zu identifizieren (sind aber sehr hilfreich und wichtig: Vereinfachen/Lösen der BGLs, Quantisieren einer Theorie, etc.).
 - Symmetrien und Erhaltungsgrößen hängen eng zusammen: Jeder (kontinuierlichen) Symmetrie ist eine Erhaltungsgröße zugeordnet (zahlreiche Beispiel in “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden”).
 - **Noether-Theorem**: Eine Formel, die es bei vorliegender Symmetrie erlaubt, die zugehörige Erhaltungsgröße durch einfaches Ableiten auszurechnen.

- Gegeben:

- Lagrange-Funktion $L(\dot{q}^j, q^j, t)$.
- Transformation der generalisierten Koordinaten: $q^j(t) \rightarrow q^j(s, t)$ mit $q^j(0, t) = q^j(t)$, d.h. s ist Parameter der Transformation (z.B. Drehwinkel bei Rotation kartesischer Koordinaten,

$$\begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(s) & -\sin(s) \\ +\sin(s) & +\cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (151)$$

- Verwende im Folgenden übersichtlichere Notation $q^j(s) \equiv q^j(s, t)$ und $\dot{q}^j \equiv \dot{q}^j(t)$.

- Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) &= \\ &= \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial \dot{q}^k(s)} \frac{\partial \dot{q}^k(s)}{\partial s} + \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial q^k(s)} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial \dot{q}^k(s)} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \right) \\ &\quad - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial \dot{q}^k(s)} \right) \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} + \frac{\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t)}{\partial q^k(s)} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \end{aligned} \quad (152)$$

($\partial/\partial s$ bedeutet Ableitung nach s , wobei t festgehalten wird) sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) \Big|_{s=0} &= \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial q^k}}_{=0 \text{ (Euler-Lagrange-Gleichungen)}} \right) \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \\
& = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right). \tag{153}
\end{aligned}$$

- Kann $\partial L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) / \partial s|_{s=0}$ als Zeitableitung geschrieben werden, d.h. gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} K(t), \tag{154}$$

folgt eine Erhaltungsgröße,

$$I = \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} - K(t) = \text{const} \tag{155}$$

(diese Gleichung wird als **Noether-Theorem** bezeichnet).

- Lässt die Transformation L invariant, das heißt

$$L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) = L(\dot{q}^j, q^j, t) \tag{156}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s), q^j(s), t) = 0, \tag{157}$$

folgt $K(t) = \text{const}$ und damit die Erhaltungsgröße,

$$I = \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j, t)}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \text{const} \tag{158}$$

(eine häufig anwendbare spezielle Variante des Noether-Theorems).

Beispiel: Impulserhaltung beim freien Teilchen

- Lagrange-Funktion:

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2. \tag{159}$$

- Transformation: $x \rightarrow x(s) = x + s$ (**Translation im Raum**).
- Es folgt $\dot{x}(s) = \dot{x}$ und damit $L(\dot{x}(s), x(s), t) = L(\dot{x}, x, t)$, d.h. Transformation lässt L invariant.
- Erhaltungsgröße:

$$I = \frac{\partial L(\dot{x}, x, t)}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = m\dot{x} = \text{const} = p \tag{160}$$

(aus Translationsinvarianz im Raum folgt Impulserhaltung).

Beispiel: Drehimpulserhaltung beim freien Teilchen

- Lagrange-Funktion:

$$L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2. \quad (161)$$

- Transformation: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}(s) = \mathcal{R}_z(s)\mathbf{r}$ bzw.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ +\sin(s) & +\cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (162)$$

(**Rotation um z -Achse**).

- Es folgt

$$\dot{\mathbf{r}}^2(s) = \dot{\mathbf{r}}^T \underbrace{\mathcal{R}_z^T(s)\mathcal{R}_z(s)}_{=1} \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (163)$$

und damit $L(\dot{\mathbf{r}}(s), \mathbf{r}(s), t) = L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$, d.h. Transformation lässt L invariant.

- Erhaltungsgröße:

$$I = \left. \frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)}{\partial \dot{r}^j} \frac{\partial r^j(s)}{\partial s} \right|_{s=0} = -m\dot{x}y + m\dot{y}x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const} = l_3 \quad (164)$$

(aus Rotationsinvarianz bezüglich der z -Achse folgt Erhaltung der z -Komponente des Drehimpulses).

- x -Komponente und y -Komponente des Drehimpulses analog.

Energieerhaltung aus dem Noether-Theorem

- Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig:

$$L(\dot{q}^j, q^j, t) = L(\dot{q}^j, q^j). \quad (165)$$

- Transformation: $q^j(t) \rightarrow q^j(s, t) = q^j(s + t)$ (**Translation in der Zeit**).
- Transformation lässt L nicht invariant, d.h. im Allgemeinen $L(\dot{q}^j(s, t), q^j(s, t), t) \neq L(\dot{q}^j(t), q^j(t), t)$ und somit (158) nicht anwendbar.
- Es gilt jedoch

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s, t), q^j(s, t)) \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial}{\partial s} L(\dot{q}^j(s + t), q^j(s + t)) \right|_{s=0} = \frac{d}{dt} L(\dot{q}^j(t), q^j(t)); \quad (166)$$

es folgt $K(t) = L(\dot{q}^j(t), q^j(t))$ und damit die Erhaltungsgröße

$$I = \frac{\partial L(\dot{q}^j, q^j)}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L(\dot{q}^j, q^j) = \text{const} = E. \quad (167)$$

- Interpretation von I als Energie, da z.B.

$$\begin{aligned}
 L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \\
 \rightarrow I &= \underbrace{\frac{\partial L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})}{\partial \dot{r}^j}}_{\substack{m\dot{r}^j \\ m\mathbf{r}^2}} \dot{r}^j - L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}).
 \end{aligned} \tag{168}$$

Zusammenfassung wichtiger Symmetrien und zugehöriger Erhaltungsgrößen

- **Homogenität des Raumes** (Translationsinvarianz im Raum) \rightarrow Impulserhaltung.
- **Isotropie des Raumes** (Rotationsinvarianz) \rightarrow Drehimpulserhaltung.
- **Homogenität der Zeit** (L hängt nicht explizit von der Zeit ab) \rightarrow Energieerhaltung.

3 Hamilton-Formalismus

- Alternative Formulierung der Mechanik.
- Keine praktischen Vorteile bei Lösung von Problemen (verwende dafür weiterhin Lagrange-Formalismus).
- Motivation:
 - Vorbereitender Schritt zur Quantisierung einer Theorie (d.h. Grundlage für Quantenmechanik): Kanonisch konjugierte Impulse, Hamilton-Funktion, Poisson-Klammern, ...
 - Wichtig auch in statistischer Physik: Phasenraum, Phasenraumvolumen, ...

3.1 Legendre-Transformation

- Gegeben: Funktion $f(x)$.
- **Legendre-Transformation** von f :

(1) Ersetze Variable x durch Variable

$$y(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad (169)$$

d.h. verwende statt x die Steigung von f bei x .

(2) Ersetze Funktion $f(x)$ durch Funktion

$$g(y) = yx(y) - f(x(y)) \quad (170)$$

* $x(y)$ erhält man durch Auflösen von (262) nach x ; Auflösbarkeit erfordert $(d/dx)y(x) = d^2f/dx^2 > 0$ oder $(d/dx)y(x) = d^2f/dx^2 < 0$, d.h. $f(x)$ muss entweder konvex oder konkav sein.

* g nennt man **Legendre-Transformierte** von f .

- Die Legendre-Transformation ist ihre eigene Inverse, d.h. zweifache Legendre-Transformation entspricht der Identität:

$$z = \frac{dg}{dy} = \underbrace{\frac{dy}{dy}}_{=1} x + y \frac{dx}{dy} - \underbrace{\frac{df}{dx}}_{=y} \frac{dx}{dy} = x \quad (171)$$

$$h = \underbrace{z}_{=x} y - g = xy - (yx - f) = f. \quad (172)$$

- Besitzt eine Funktion mehrere Variablen, z.B. $f(x_1, \dots, x_N)$, kann man auch bezüglich einiger oder aller dieser Variablen Legendre-transformieren:

$$y_j = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_j} \quad (\rightarrow x_j(y_1, \dots, y_N)) \quad (173)$$

$$g(y_1, \dots, y_N) = \sum_{j=1}^N y_j x_j(y_1, \dots, y_N) - f(x_1(y_1, \dots, y_N), \dots, x_N(y_1, \dots, y_N)). \quad (174)$$

- Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion (zunächst in einer generalisierten Koordinate, d.h. $L = L(\dot{q}, q, t)$) bezüglich der “generalisierten Geschwindigkeit” \dot{q} :

$$p = \frac{\partial L(\dot{q}, q, t)}{\partial \dot{q}} \quad (\rightarrow \dot{q}(p, q, t)) \quad (175)$$

$$H(p, q, t) = p\dot{q}(p, q, t) - L(\dot{q}(p, q, t), q, t). \quad (176)$$

– p heißt **kanonisch konjugierter Impuls** zu q (auch **kanonischer Impuls, generalisierter Impuls**).

– H heißt **Hamilton-Funktion**.

– Die Hamilton-Funktion ist eine Funktion des kanonisch konjugierten Impulses p und der generalisierten Koordinate q ; in ihr darf kein \dot{q} auftreten, d.h. alle \dot{q} müssen durch p und q ausgedrückt werden.

- Vergleiche Hamilton-Funktion (176) und Energieerhaltung aus Noether-Theorem (167) \rightarrow Hamilton-Funktion H entspricht (in vielen Fällen) der Energie.

- Verallgemeinerung auf mehrere generalisierte Koordinaten:

$$p_j = \frac{\partial L(\dot{q}^k, q^k, t)}{\partial \dot{q}^j} \quad (\rightarrow \dot{q}^j(p_k, q^k, t)) \quad (177)$$

$$H(p_k, q^k, t) = p_j \dot{q}^j(p_k, q^k, t) - L(\dot{q}^k(p_k, q^k, t), q^k, t) \quad (178)$$

($p_j \dot{q}^j$ impliziert \sum_j).

- Ergänzung zu Abschnitt 2.7.1: Falls q^j zyklische Variable, dann ist zugehöriger kanonisch konjugierter Impuls $p_j = \partial L / \partial \dot{q}^j$ erhalten.

- Beispiel: Teilchen in 1 Raumdimension im Potential V :

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \quad (179)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m} \quad (180)$$

$$H(p, x, t) = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{p^2}{2m} - V(x) \right) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (181)$$

(H entspricht Summe aus kinetischer und potentieller Energie; kanonisch konjugierter Impuls entspricht dem im letzten Semester eingeführten [kinetischen] Impuls).

- Beispiel: Teilchen in 2 Raumdimensionen im Potential V , Polarkoordinaten:

$$L(\dot{r}, \dot{\varphi}, r, \varphi, t) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r, \varphi) \quad (182)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (183)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad (184)$$

$$\begin{aligned}
H(p_r, p_\varphi, r, \varphi, t) &= p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \\
&= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \left(\frac{m}{2} \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4} \right) - V(r, \varphi) \right) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r, \varphi)
\end{aligned} \tag{185}$$

(H entspricht Summe aus kinetischer und potentieller Energie; kanonisch konjugierter Impuls zu φ entspricht nicht dem [kinetischen] Impuls, sondern dem Drehimpuls, d.h. $p_\varphi = l = mr^2 \dot{\varphi}$).

3.2 Hamiltonsche BGLs

- **Hamiltonsche BGLs**

$$\dot{q}^j = + \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , \quad \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q^j} \tag{186}$$

($j = 1, \dots, f$; f ist Anzahl der generalisierten Koordinaten) liefern ein System von $2f$ DGLs 1. Ordnung zur Bestimmung der physikalischen Bewegung, sind also äquivalent zu den Lagrangeschen BGLs.

- Hamiltonsche BGLs folgen aus den Lagrangeschen BGLs (und der Legendre-Transformation (177) und (178)):

$$+ \frac{\partial H}{\partial p_j} = + \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_j} \dot{q}^k}_{=\delta_{jk}} + p_k \underbrace{\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial p_j}}_{=p_k} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}}_{=p_k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial p_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^k}}_{=0} \frac{\partial q^k}{\partial p_j} = \dot{q}^j \tag{187}$$

$$- \frac{\partial H}{\partial q^j} = - \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial q^j} \dot{q}^k}_{=0} - p_k \underbrace{\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^j}}_{=p_k} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}}_{=p_k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^j} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^j}}_{=(d/dt)\partial L/\partial \dot{q}^j=(d/dt)p_j} = \dot{p}_j. \tag{188}$$

- Umgekehrt kann man zeigen, dass die Lagrangeschen BGLs aus den Hamiltonschen BGLs folgen.
- Fortsetzung obiges Beispiel: Teilchen in 1 Raumdimension im Potential V :

$$\begin{aligned}
H(p, x, t) &= \frac{p^2}{2m} + V(x) \\
\rightarrow \dot{x} &= + \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial V}{\partial x}
\end{aligned} \tag{189}$$

(Kombination der beiden Hamiltonschen BGLs liefert $m\ddot{x} = -\partial V/\partial x$, die Newtonsche BGL).

- Fortsetzung obiges Beispiel: Teilchen in 2 Raumdimensionen im Potential V , Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
H(p_r, p_\varphi, r, \varphi, t) &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r, \varphi) \\
\rightarrow \dot{r} &= + \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = - \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \\
\rightarrow \dot{\varphi} &= + \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{p}_\varphi = - \frac{\partial H}{\partial \varphi} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi}
\end{aligned} \tag{190}$$

(Kombination der vier Hamiltonschen BGLs liefert die bekannten BGLs (102)).

3.3 Poisson-Klammern

- Betrachte Zeitableitung einer Größe $A(p_j, q^j, t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial p_j} \underbrace{\frac{dp_j}{dt}}_{=-\partial H/\partial q^j} + \frac{\partial A}{\partial q^j} \underbrace{\frac{dq^j}{dt}}_{=+\partial H/\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q^j} + \frac{\partial A}{\partial t} = \\
&= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t},
\end{aligned} \tag{191}$$

wobei die **Poisson-Klammer**

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q^j} \tag{192}$$

definiert wurde.

- Eigenschaften der Poisson-Klammer:

– Antisymmetrie:

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (\text{damit } \{A, A\} = 0). \tag{193}$$

– Linearität:

$$\{a_1 A_1 + a_2 A_2, B\} = a_1 \{A_1, B\} + a_2 \{A_2, B\}, \tag{194}$$

wobei a_1 und a_2 Konstanten sind.

– Produktregel:

$$\{A_1 A_2, B\} = \{A_1, B\} A_2 + A_1 \{A_2, B\}. \tag{195}$$

Damit kann man eine Poisson-Klammer mit beliebigen Potenzen von p_j und q^j auf elementare Poisson-Klammern zurückführen, z.B.

$$\{(q^1)^3, p_1\} = 3(q^1)^2 \{q^1, p_1\}, \tag{196}$$

wobei für elementare Poisson-Klammern

$$\{p_j, q^k\} = -\delta_{jk}, \quad \{p_j, p_k\} = \{q^j, q^k\} = 0 \tag{197}$$

gilt.

- Hängt eine Größe A nicht explizit von der Zeit ab, d.h. $A(p_j, q^j, t) = A(p_j, q^j)$ bzw. $\partial A/\partial t = 0$, und gilt $\{A, H\} = 0$, dann ist A eine Erhaltungsgröße (folgt aus (191)).
→ Mit der Poisson-Klammer kann man testen, ob eine Größe eine Erhaltungsgröße ist.
- Spezialfall: Hängt H nicht explizit von der Zeit ab, d.h. $H(p_j, q^j, t) = H(p_j, q^j)$, dann ist H eine Erhaltungsgröße ($\{H, H\} = 0$ gilt immer).
→ “Hängt H nicht explizit von der Zeit ab, ist die Energie erhalten.”
- Beispiel: Nachweis, dass der Drehimpuls beim freien Teilchen erhalten ist:

– Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (198)$$

– Drehimpuls: $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

– Nachweis, dass z -Komponente des Drehimpulses erhalten ist:

$$\{l_z, H\} = \left\{ xp_y - yp_x, \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \right\} = \frac{1}{2m} \left(\underbrace{\{x, p_x^2\}}_{=2p_x} p_y - \underbrace{\{y, p_y^2\}}_{=2p_y} p_x \right) = 0. \quad (199)$$

– x -Komponente und y -Komponente des Drehimpulses analog.

- Die Hamiltonschen BGLs (186) können mit Hilfe der Poisson-Klammern formuliert werden:

$$\dot{q}^j = \{q^j, H\} \quad , \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}. \quad (200)$$

- Bezug zur Quantenmechanik (wird erst im 4. Semester in “Theoretische Physik 4 – Quantenmechanik” verständlich):
 - Ausgangspunkt einer Quantisierung ist i.d.R. die Hamilton-Funktion (178), die zum *Hamilton-Operator* wird.
 - (191) entspricht der *Heisenbergschen Bewegungsgleichung für Operatoren*.
 - Poissonklammer (192) entspricht dem *Kommutator zweier Operatoren* (Kommutatoren sind die wesentlichen Objekte der Quantenmechanik; durch Vorgabe geeigneter nicht-verschwindender Kommutatoren, z.B. $[p, q] = -i\hbar$, erhält man theoretische Beschreibung quantenmechanischer Phänomene).
 - Elementare Poissonklammern (197) spiegeln *Unschärferelation von Ort und Impuls* wieder, d.h. Ort und Impuls kann nicht gleichzeitig beliebig genau festgelegt werden.

3.4 Phasenraum

- **Phasenraum:**

- Der $2f$ -dimensionale Raum aller möglichen generalisierten Impulse und Koordinaten, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1, \dots, p_f, q^1, \dots, q^f)$ eines betrachteten Systems.
- Entspricht dem Raum aller möglichen Zustände.

- **Phasenraumtrajektorien** markieren die zeitliche Entwicklung des Systems, d.h. wird ausgehend vom Zustand $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ durch die Dynamik des Systems der Zustand $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ zu einem späteren Zeitpunkt erreicht, sind die Phasenraumpunkte $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ und $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ durch eine Phasenraumtrajektorie verbunden.
- Beispiel: 1-dimensionaler HO.

– Phasenraum ist 2-dimensional, (p, q) .

– Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (201)$$

– Hamiltonsche BGLs:

$$\dot{q} = +\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q. \quad (202)$$

– Allgemeine Lösung der Hamiltonschen BGLs:

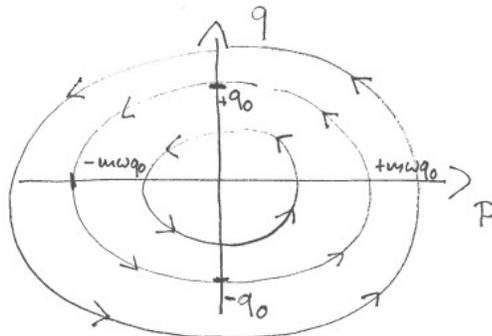
$$\ddot{q} = -\omega^2 q \rightarrow q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) \quad (203)$$

$$p(t) = m\dot{q} = m\omega(-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = -m\omega q_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t) \quad (204)$$

(im letzten Schritt jeweils Umbenennung $A = q_0$ und $m\omega B = p_0$).

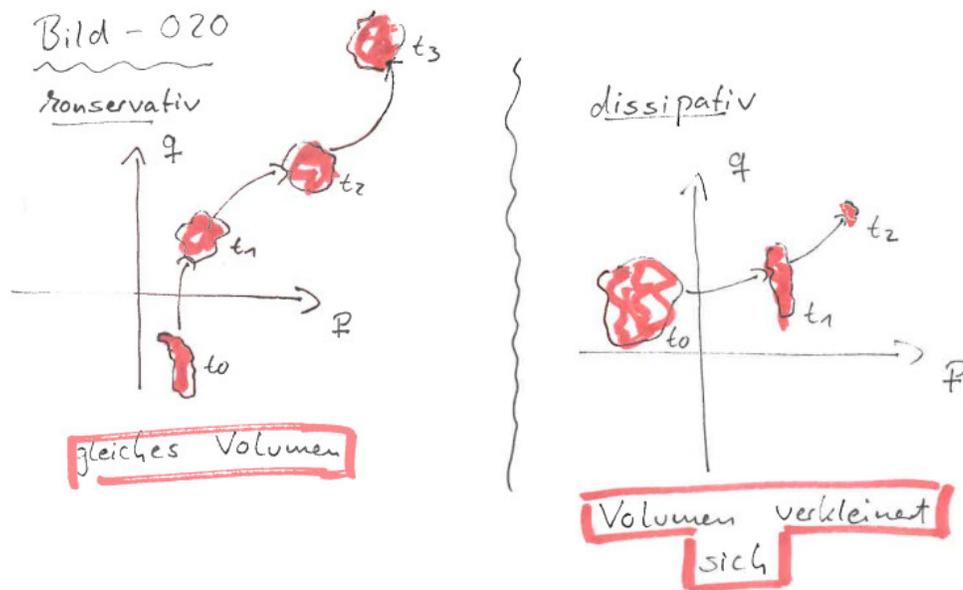
- $(p(t), q(t))$ beschreibt Phasenraumtrajektorien, im Fall des 1-dimensionalen HOs Ellipsen in der p - q -Ebene, z.B. für $p_0 = 0$ ergibt sich $(p(t), q(t)) = (-m\omega q_0 \sin(\omega t), q_0 \cos(\omega t))$.

Bild - 019



- Phasenraumtrajektorien überkreuzen sich nicht (gäbe es Überkreuzungen, wäre die zeitliche Entwicklung des Systems nicht eindeutig von den BGLs festgelegt).
- Ein Phasenraumvolumen (z.B. eine Menge von Zuständen mit ähnlichen Orten und Impulsen $\approx (\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ beschrieben durch eine Kugel mit Mittelpunkt $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$)

- ändert sich bei konservativen Systemen (Energieerhaltung) nicht mit der Zeit, ist also erhalten (**Satz von Liouville**, kann man einfach zeigen),
- verkleinert sich bei dissipativen Systemen (keine Energieerhaltung, z.B. aufgrund von Reibungskräften) mit der Zeit, ist also nicht erhalten.



- Phasenraum vor allem wichtig in statistischer Physik, d.h. bei Berechnung von Erwartungswerten und Wahrscheinlichkeiten für Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden, z.B. Gase, Magneten, ... (Inhalt von "Theoretische Physik 5 – Thermodynamik und Statistische Physik"):
 - In statistischer Physik muss man häufig Zustände zählen (z.B. Anzahl der Zustände unterhalb einer vorgegebenen Energie).
 - Phasenraumvolumen ist proportional zur Anzahl der Zustände.
 - In einer klassischen (= nicht-quantisierten) Theorie entspricht ein Zustand einem Punkt im Phasenraum, d.h. Zustände liegen unendlich dicht beieinander.
 - In einer quantisierten Theorie nimmt ein Zustand ein endliches Volumen im Phasenraum ein, d.h. endliche Anzahl von Zuständen in endlichen Phasenraumvolumen.

4 Kleine Schwingungen von Vielteilchensystemen

- Grundlagen von Vielteilchensystemen: “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (WiSe 2015/16), Kapitel 6.
- Betrachte N Massenpunkte (Massen m_j), deren Positionen \mathbf{r}_j durch f generalisierte Koordinaten $\mathbf{Q} = (Q^1, \dots, Q^f)$ beschrieben werden, d.h. $\mathbf{r}_j(\mathbf{Q})$, im Potential $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv V(\mathbf{Q})$:

$$L = T - V = \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{\mathbf{r}}_j^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \dot{Q}^k \underbrace{\sum_j m_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial Q^k} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial Q^l}}_{=M_{kl}(\mathbf{Q})} \dot{Q}^l - V(\mathbf{Q}) \quad (205)$$

(M_{kl} hat gleiche Struktur, wie Metrik aus Abschnitt 2.6, kann als eine Art Metrik des Gesamtsystems interpretiert werden).

- $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}$ ist Gleichgewichtslage, falls

$$\left. \frac{\partial}{\partial Q^j} V(\mathbf{Q}) \right|_{\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}} = 0. \quad (206)$$

- Gleichgewichtslage stabil, falls Hesse-Matrix

$$K_{jk}(\tilde{\mathbf{Q}}) = \left. \frac{\partial}{\partial Q^j} \frac{\partial}{\partial Q^k} V(\mathbf{Q}) \right|_{\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}} \quad (207)$$

positiv definit, d.h. falls $\mathbf{q}K(\tilde{\mathbf{Q}})\mathbf{q} > 0$ für beliebige $\mathbf{q} \neq 0$ gilt bzw. falls alle Eigenwerte von $K(\tilde{\mathbf{Q}})$ positiv sind (geometrisch: V hat in jeder Richtung im f -dimensionalen Parameterraum positive Krümmung); Gleichgewichtslage instabil sonst.

- Ziel dieses Kapitels: Kleine Schwingungen um stabile Gleichgewichtslagen berechnen (häufig auftretendes Phänomen bzw. Problem, z.B. Molekülschwingungen, Ausbreitung von Wellen im Kristall, ...).

4.1 Quadratische Näherung der Lagrange-Funktion

- Im Folgenden $2f$ -dimensionale Taylor-Näherung bis einschließlich 2. Ordnung in kleinen Auslenkungen aus stabiler Gleichgewichtslage $q^j = Q^j - \tilde{Q}^j$ und den entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{q}^j = \dot{Q}^j$ (Geschwindigkeiten sind proportional zu Auslenkungen bei kleinen und damit harmonischen Schwingungen [siehe HO, “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” (WiSe 2015/16), Kapitel 4], damit q^j klein, wenn \dot{q}^j klein, und umgekehrt).

- Potential:

$$\begin{aligned}
 V &= \underbrace{V(\tilde{\mathbf{Q}})}_{\text{irrelevant}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial Q^j} V(\mathbf{Q}) \Big|_{\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}}}_{=0} q^j + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial Q^j} \frac{\partial}{\partial Q^k} V(\mathbf{Q}) \Big|_{\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}}}_{=K_{jk}(\tilde{\mathbf{Q}})} q^j q^k + \underbrace{\mathcal{O}(q^3)}_{\text{wird vernachlässigt}} \\
 \rightarrow V(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \mathbf{q} K(\tilde{\mathbf{Q}}) \mathbf{q} \tag{208}
 \end{aligned}$$

- Konstante $V(\tilde{\mathbf{Q}})$ physikalisch irrelevant, wird im Folgenden weggelassen.
- q^3 - und höhere Ordnungen werden vernachlässigt (gute Näherung für hinreichend kleine Schwingungen).
- Potential $V = V(\mathbf{q})$ ist damit f -dimensionales Paraboloid, nach oben geöffnet, da $K(\tilde{\mathbf{Q}})$ positiv definit (jede Auslenkung aus stabiler Gleichgewichtslage erhöht potentielle Energie).

- Kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \dot{q}^j M_{jk}(\tilde{\mathbf{Q}}) \dot{q}^k + \underbrace{\mathcal{O}(q^3)}_{\text{wird vernachlässigt}} \\
 \rightarrow T(\dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} M(\tilde{\mathbf{Q}}) \dot{\mathbf{q}} \tag{209}
 \end{aligned}$$

- q^3 - und höhere Ordnungen werden vernachlässigt (gute Näherung für hinreichend kleine Schwingungen).

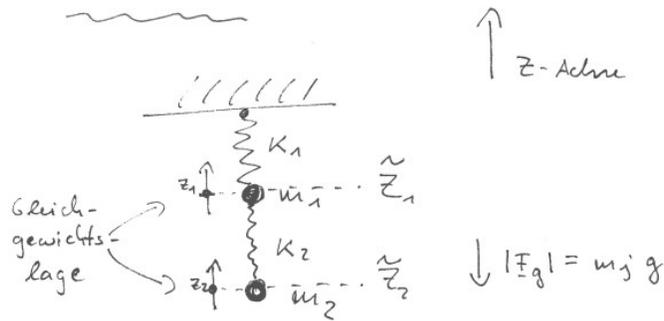
- Insgesamt:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} M \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q} K \mathbf{q}. \tag{210}$$

- $M = M(\tilde{\mathbf{Q}})$ wird als **Massenmatrix** bezeichnet.
- $K = K(\tilde{\mathbf{Q}})$ wird als **Kraftmatrix** bezeichnet.

- Beispiel: Vertikale Bewegung von 2 Massenpunkten (Massen m_1 und m_2 , Positionen Z^1 und Z^2) im konstanten Schwerfeld, Massenpunkt 1 mit Feder 1 (Federkonstante κ_1) aufgehängt, Massenpunkt 2 mit Feder 2 (Federkonstante κ_2) mit Massenpunkt 1 verbunden.

Bild - 021



z_1 und z_2
beschreiben Auslenkungen
aus Gleichgewichtslage

Eigenvektor \underline{a}_1 :

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ +2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1^2 = \frac{\kappa}{m}$$



Eigenvektor \underline{a}_2 :

$$\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2 = 6 \frac{\kappa}{m}$$



- Potential:

$$V(\mathbf{Z}) = m_1 g Z^1 + m_2 g Z^2 + \frac{1}{2} \kappa_1 (Z^1)^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 (Z^2 - Z^1)^2. \quad (211)$$

- Gleichgewichtslage:

$$\left. \frac{\partial}{\partial Z^1} V \right|_{\mathbf{z}=\tilde{\mathbf{z}}} = m_1 g + \kappa_1 \tilde{Z}^1 - \kappa_2 (\tilde{Z}^2 - \tilde{Z}^1) = 0 \quad (212)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial Z^2} V \right|_{\mathbf{z}=\tilde{\mathbf{z}}} = m_2 g + \kappa_2 (\tilde{Z}^2 - \tilde{Z}^1) = 0, \quad (213)$$

d.h.

$$\tilde{Z}^1 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{\kappa_1}, \quad \tilde{Z}^2 = \tilde{Z}^1 - \frac{m_2 g}{\kappa_2} = -\frac{(m_1 + m_2)g}{\kappa_1} - \frac{m_2 g}{\kappa_2}. \quad (214)$$

- Potential ausgedrückt durch Auslenkungen aus Gleichgewichtslage $z^j = Z^j - \tilde{Z}^j$:

$$V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \kappa_1 (z^1)^2 + \frac{1}{2} \kappa_2 (z^2 - z^1)^2 \quad (215)$$

(irrelevante Konstante $V(\tilde{\mathbf{Z}})$ weggelassen).

– Kinetische Energie:

$$T(\dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}m_1(\dot{z}^1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{z}^2)^2. \quad (216)$$

– Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{z}}M\dot{\mathbf{z}} - \frac{1}{2}\mathbf{z}K\mathbf{z} \quad (217)$$

mit Massen- und Kraftmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (218)$$

$$K = \underbrace{\begin{pmatrix} +\kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Feder 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} +\kappa_2 & -\kappa_2 \\ -\kappa_2 & +\kappa_2 \end{pmatrix}}_{\text{Feder 2}} = \begin{pmatrix} +\kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ -\kappa_2 & +\kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (219)$$

4.2 BGls und deren Lösung

- BGls aus Lagrange-Funktion (210) mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = M_{jk}\ddot{q}^k + K_{jk}q^k = 0 \quad (220)$$

bzw. kompakt in Matrix-Vektor-Form

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0. \quad (221)$$

- (221) ist System homogener linearer DGLs mit konstanten Koeffizienten, kann daher durch Exponentialansatz gelöst werden (siehe auch “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2015/16], Abschnitt 3.6):

$$\mathbf{q} = \mathbf{a}_j e^{+i\omega_j t} \quad (222)$$

(\mathbf{a}_j und ω_j sind im Folgenden zu bestimmende Parameter des Ansatzes).

- Einsetzen des Exponentialansatzes in (221):

$$\left(-M\omega_j^2 + K\right)\mathbf{a}_j \underbrace{e^{+i\omega_j t}}_{\neq 0} = 0 \quad (223)$$

und damit

$$\left(-M\omega_j^2 + K\right)\mathbf{a}_j = 0 \quad (224)$$

((224) nennt man **verallgemeinertes Eigenwertproblem**: Lösungen sind Paare von Eigenwerten ω_j^2 und Eigenvektoren $\mathbf{a}_j \neq 0$ [$\mathbf{a}_j = 0$ ist uninteressante Lösung, daher ausgeschlossen]).

- Damit (224) Lösungen $\mathbf{a}_j \neq 0$ hat muss $\det(-M\omega_j^2 + K) = 0$ gelten:

- $\det(-M\omega_j^2 + K) = 0$ nennt man charakteristisches Polynom, ist ein Polynom f -ten Grades in ω_j^2 , hat damit f Nullstellen ω_j^2 , die gesuchten Eigenwerte bzw. **Eigenfrequenzen** (man kann zeigen, dass Eigenwerte ω_j^2 reell und $\omega_j^2 > 0$).
- Zu jedem Eigenwert ω_j^2 kann durch Lösen von (224) ein Eigenvektor \mathbf{a}_j bestimmt werden (man kann zeigen, dass diese Eigenvektoren \mathbf{a}_j reell gewählt werden können; von reellen \mathbf{a}_j wird im Folgenden ausgegangen):
 - * Systeme mit kleiner Anzahl von Freiheitsgraden f : Analytische Rechnungen möglich, Eigenvektoren z.B. über Gaußsches Eliminationsverfahren.
 - * Systeme mit großer Anzahl von Freiheitsgraden f : Meist numerische Rechnungen mit speziellen Verfahren zur effizienten Lösung generalisierter Eigenwertprobleme erforderlich.
- M und K symmetrisch, d.h. $M = M^T$ und $K = K^T$; aus (224) folgt damit $0 = \mathbf{a}_j^T(-M\omega_j^2 + K)$ und daraus

$$0 = \mathbf{a}_j^T \left(-M\omega_j^2 + K \right) \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_j^T \left(-M\omega_j^2 + M\omega_k^2 \right) \mathbf{a}_k = -(\omega_j^2 - \omega_k^2) \mathbf{a}_j^T M \mathbf{a}_k, \quad (225)$$

d.h. Eigenvektoren \mathbf{a}_j und \mathbf{a}_k zu verschiedenen Eigenwerten $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$ sind bezüglich Massenmatrix M orthogonal, d.h. $\mathbf{a}_j^T M \mathbf{a}_k = 0$.

- Dementsprechend ist es zweckmäßig, Eigenvektoren gemäß

$$\mathbf{a}_j^T M \mathbf{a}_k = \delta_{jk} \quad (226)$$

zu normieren:

- * Für Eigenvektoren \mathbf{a}_j und \mathbf{a}_k zu verschiedenen Eigenwerten $\omega_j^2 \neq \omega_k^2$ (226) automatisch erfüllt (wurde oben gezeigt).
 - * Für $j = k$ kann Normierung durch Ersetzung $\mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{a}_j / \sqrt{\mathbf{a}_j^T M \mathbf{a}_j}$ erreicht werden (ein Eigenvektor ist niemals eindeutig; nach Multiplikation mit beliebigen Faktor $\neq 0$ handelt es sich noch immer um gleichwertigen Eigenvektor).
 - * Für Eigenvektoren \mathbf{a}_j und \mathbf{a}_k zu gleichen Eigenwerten $\omega_j^2 = \omega_k^2$ (**entartete Eigenwerte**), ersetzt man \mathbf{a}_j und \mathbf{a}_k durch geeignete Linearkombinationen (diese sind noch immer Eigenvektoren), die (226) erfüllen (Details eventuell in Übungsaufgaben oder in Literatur).
- Allgemeine komplexe Lösung der BGLs (221):

$$\mathbf{q} = \sum_j \mathbf{a}_j \left(A_j e^{+i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t} \right) \quad (227)$$

($\omega_j > 0$, d.h. definiert als Wurzel aus ω_j^2) mit $2f$ unabhängigen Konstanten A_j und B_j , die durch ABs festgelegt werden.

- Allgemeine reelle Lösung der BGLs (221) (die physikalische bedeutungsvolle Lösung): Nur Werte für A_j und B_j zulassen, die reelles \mathbf{q} garantieren, führt auf

$$\mathbf{q} = \sum_j \mathbf{a}_j \left(\tilde{A}_j \cos(\omega_j t) + \tilde{B}_j \sin(\omega_j t) \right) \quad (228)$$

(wobei \tilde{A}_j und \tilde{B}_j die unabhängigen Konstanten A_j und B_j ersetzen) oder

$$\mathbf{q} = \sum_j \mathbf{a}_j C_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \quad (229)$$

(wobei C_j und φ_j die unabhängigen Konstanten A_j und B_j ersetzen).

- ABs: Z.B. Vorgabe von $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t=0)$ und $\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(t=0)$, d.h. Auslenkungen und Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t=0$; dann erhält man A_j und B_j zweckmäßig durch Multiplikation mit $\mathbf{a}_k^T M$,

$$\mathbf{a}_k^T M \mathbf{q}_0 = \mathbf{a}_k^T M \sum_j \mathbf{a}_j \left(A_j e^{+i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t} \right) \Big|_{t=0} = A_k + B_k \quad (230)$$

$$\mathbf{a}_k^T M \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{a}_k^T M \sum_j \mathbf{a}_j \left(A_j (+i\omega_j) e^{+i\omega_j t} + B_j (-i\omega_j) e^{-i\omega_j t} \right) \Big|_{t=0} = i\omega_k (A_k - B_k), \quad (231)$$

d.h. für jedes k zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von A_k und B_k (Implementierung der ABs generiert automatisch reelles \mathbf{q}).

- Fortsetzung des Beispiels aus Abschnitt 4.1:

– Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \left(-M\omega_j^2 + K \right) = \det \begin{pmatrix} -m_1\omega_j^2 + \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 \\ -\kappa_2 & -m_2\omega_j^2 + \kappa_2 \end{pmatrix} = \\ &= \left(-m_1\omega_j^2 + \kappa_1 + \kappa_2 \right) \left(-m_2\omega_j^2 + \kappa_2 \right) - \kappa_2^2. \end{aligned} \quad (232)$$

– Betrachte im Folgenden den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$, $\kappa_1/3 = \kappa_2/2 = \kappa$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-m\omega_j^2 + 5\kappa \right) \left(-m\omega_j^2 + 2\kappa \right) - 4\kappa^2 = (m\omega_j^2)^2 - 7\kappa(m\omega_j) + 6\kappa^2 \\ \rightarrow \omega_{1,2}^2 &= \left(\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{7^2 - 4 \times 6}}{2} \right) \frac{\kappa}{m} = \left(\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} \right) \frac{\kappa}{m}, \end{aligned} \quad (233)$$

d.h. $\omega_1^2 = \kappa/m$ und $\omega_2^2 = 6\kappa/m$.

– Eigenvektor zu $\omega_1^2 = \kappa/m$:

$$\begin{aligned} \left(-M\omega_1^2 + K \right) \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} -m\omega_1^2 + 5\kappa & -2\kappa \\ -2\kappa & -m\omega_1^2 + 2\kappa \end{pmatrix} \mathbf{a}_1 = \\ &= \kappa \begin{pmatrix} +4 & -2 \\ -2 & +1 \end{pmatrix} \mathbf{a}_1 = 0, \end{aligned} \quad (234)$$

d.h. $\mathbf{a}_1 = (+1, +2)$, gleichgerichtete Schwingung der Massenpunkte (siehe Bild-021).

– Eigenvektor zu $\omega_2^2 = 6\kappa/m$:

$$\begin{aligned} \left(-M\omega_2^2 + K \right) \mathbf{a}_2 &= \begin{pmatrix} -m\omega_2^2 + 5\kappa & -2\kappa \\ -2\kappa & -m\omega_2^2 + 2\kappa \end{pmatrix} \mathbf{a}_2 = \\ &= \kappa \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{a}_2 = 0, \end{aligned} \quad (235)$$

d.h. $\mathbf{a}_2 = (+2, -1)$, entgegengerichtete Schwingung der Massenpunkte (siehe Bild-021).

– Nach Normierung gemäß (226): $\mathbf{a}_1 = (+1, +2)/\sqrt{5m}$ und $\mathbf{a}_2 = (+2, -1)/\sqrt{5m}$.

– ABs bei $t = 0$: Massenpunkt 1 unausgelenkt in Ruhe, Massenpunkt 2 ausgelenkt um Δ in Ruhe:

* $\mathbf{z}_0 = (0, \Delta)$, $\dot{\mathbf{z}}_0 = (0, 0)$.

* $\mathbf{a}_1^T M \mathbf{z}_0 = (+2/\sqrt{5m})m\Delta = +2\sqrt{m}\Delta/\sqrt{5} = A_1 + B_1$

$\mathbf{a}_1^T M \dot{\mathbf{z}}_0 = 0 = i\omega_1(A_1 - B_1)$

$\rightarrow A_1 = B_1 = +\sqrt{m}\Delta/\sqrt{5}$.

* $\mathbf{a}_2^T M \mathbf{z}_0 = (-1/\sqrt{5m})m\Delta = -\sqrt{m}\Delta/\sqrt{5} = A_2 + B_2$

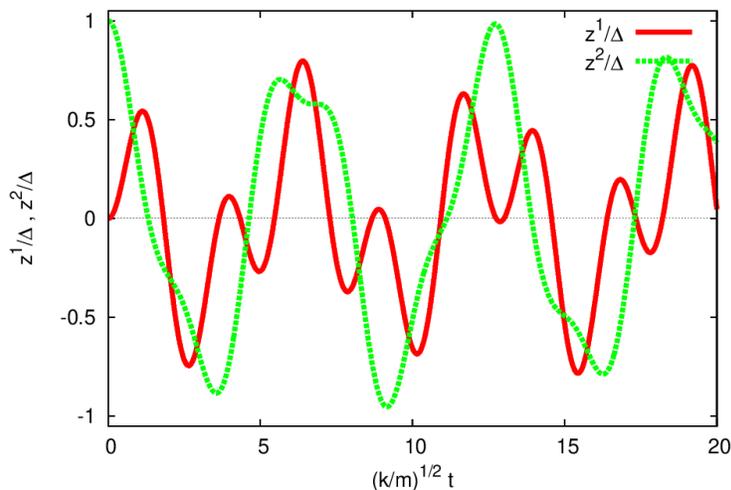
$\mathbf{a}_2^T M \dot{\mathbf{z}}_0 = 0 = i\omega_1(A_2 - B_2)$

$\rightarrow A_2 = B_2 = -\sqrt{m}\Delta/2\sqrt{5}$.

* Damit spezielle Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \sum_j \mathbf{a}_j \left(A_j e^{+i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t} \right) = \\ &= \frac{2}{5} \begin{pmatrix} +1 \\ +2 \end{pmatrix} \Delta \cos(\sqrt{\kappa/mt}) - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \end{pmatrix} \Delta \cos(\sqrt{6\kappa/mt}) \end{aligned} \quad (236)$$

(Überlagerung der beiden Schwingungen $\propto \cos(\sqrt{\kappa/mt})$ und $\propto \cos(\sqrt{6\kappa/mt})$ führt zu kompliziertem sich nicht wiederholendem Schwingungsverhalten).



4.3 Normalschwingungen und Normalkoordinaten

- Schwingt ein System so, dass nur einer der Eigenvektoren \mathbf{a}_j und damit nur eine der Eigenfrequenzen ω_j zu \mathbf{q} beiträgt, d.h. nur für einen Index $j = k$ die Konstanten A_k und B_k von Null verschieden sind (äquivalent \tilde{A}_k und \tilde{B}_k bzw. C_k von Null verschieden sind), spricht man von einer **Normalschwingung**.
- Normalschwingungen sind linear unabhängige Schwingungszustände, die zu einfachen sin- bzw. cos-förmigen Schwingungsverhalten mit Periode $2\pi/\omega_j$ führen.

- Übergang zu **Normalkoordinaten** $\vec{\xi}$ häufig zweckmäßig,

$$q^j = a_k^j \xi^k \quad (237)$$

(unterer Index k in a_k^j nummeriert Eigenvektoren \mathbf{a}_k , oberer Index j in a_k^j bezeichnet j -te Komponente des Eigenvektors \mathbf{a}_k).

- (237) kann auch in Matrix-Vektor-Form geschrieben werden,

$$\mathbf{q} = A\vec{\xi}, \quad (238)$$

wobei Spalten der $f \times f$ -Matrix A Eigenvektoren \mathbf{a}_k sind, d.h. $A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_f)$.

- Lagrange-Funktion in Normalkoordinaten:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}M\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\mathbf{q}K\mathbf{q} = \frac{1}{2}\dot{\vec{\xi}}A^TMA\dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2}\vec{\xi}A^TKA\vec{\xi} = \sum_j \left(\frac{1}{2}(\dot{\xi}^j)^2 - \frac{\omega_j^2}{2}(\xi^j)^2 \right), \quad (239)$$

wobei

$$A^TMA = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{a}_f^T \end{pmatrix} M(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_f) = \mathbb{1} \quad (240)$$

$$\begin{aligned} A^TKA &= A^TK(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_f) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{a}_f^T \end{pmatrix} M(\mathbf{a}_1\omega_1^2 \mathbf{a}_2\omega_2^2 \dots \mathbf{a}_f\omega_f^2) = \\ &= \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_f^2) \end{aligned} \quad (241)$$

verwendet wurde.

- L hat Struktur einer Summe über unabhängige HOs, d.h. f unabhängige BGLs

$$\ddot{\xi}^j + \omega_j^2 \xi^j = 0, \quad (242)$$

deren Lösung sehr einfach ist (siehe “Theoretische Physik 1 – Mathematische Methoden” [WiSe 2015/16], Kapitel 4); Übergang zu Normalkoordinaten erfordert aber Kenntnis der Eigenvektoren \mathbf{a}_j , also insgesamt genauso schwierig, wie Lösung in ursprünglichen Koordinaten q^j .

- Hamilton-Funktion (d.h. Gesamtenergie)

$$H = \sum_j \left(\frac{1}{2}(\dot{\xi}^j)^2 + \frac{\omega_j^2}{2}(\xi^j)^2 \right) \quad (243)$$

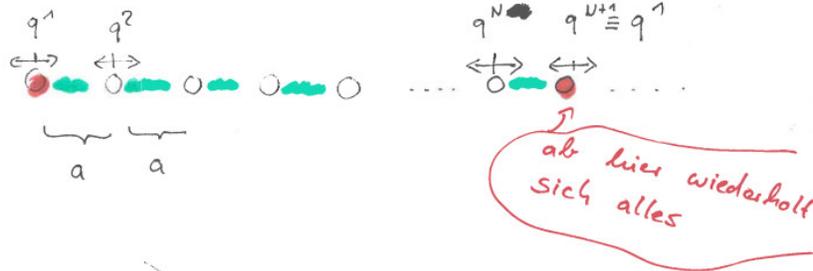
hat ebenfalls Struktur einer Summe über unabhängige HOs, zeigt, dass die in den Normalschwingungen enthaltenen Energien zeitlich konstant sind, d.h. nicht untereinander ausgetauscht werden.

- Normalschwingungen erlauben einfache Quantisierung (wird erst im 4. Semester in “Theoretische Physik 4 – Quantenmechanik” verständlich).

4.4 Ausbreitung von Wellen im Kristall

- Betrachte einfaches Modell eines Festkörpers/Kristalls:
 - Nur 1 Raumdimension (leicht auf 2 oder 3 Raumdimensionen erweiterbar).
 - N Atome/Moleküle (Masse m), im energetischen Minimum, d.h. im Gleichgewicht in konstantem Abstand a aufgereiht (a hat Größenordnung des Atom-/Moleküldurchmessers).
 - Generalisierte Koordinaten q^j , $j = 1, \dots, N$ sind Auslenkungen aus dieser Gleichgewichtslage.
 - Kräfte nur zwischen Nachbaratomen/-molekülen, beschrieben durch Potentiale $V(q^j - q^{j-1}) = (\kappa/2)(q^j - q^{j-1})^2 + \mathcal{O}((q^j - q^{j-1})^3)$ (bei kleinen Schwingungen der Atome/Moleküle $\mathcal{O}((q^j - q^{j-1})^3)$ vernachlässigbar).
 - **Periodische Randbedingungen:** $q^j \equiv q^{j+N}$, d.h. Kristall hat keine Ränder, nach N Atomen/Molekülen wiederholen sich die Auslenkungen (erlaubt analytische Berechnung der Kristallschwingungen; bei numerischer Lösung auch beliebige andere, z.B. **offene Randbedingungen** möglich).

Bild - 022



$$M = \begin{pmatrix} m & & & 0 \\ & m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m \end{pmatrix} \leftarrow N \times N \text{ - Matrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa & & 0 \\ -\kappa & \kappa & -\kappa & \\ & -\kappa & \kappa & -\kappa \\ & & -\kappa & \kappa \end{pmatrix}$$

jede nächste-Nachbar-WW gibt Beitrag

$$\begin{pmatrix} \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{pmatrix}$$

- Lagrange-Funktion:

$$L = \sum_{j=1}^N \left(\frac{m}{2} (\dot{q}^j)^2 - \frac{\kappa}{2} (q^j - q^{j-1})^2 \right) \quad (244)$$

($q^0 \equiv q^N$ aufgrund periodischer Randbedingungen).

- BGLs:

$$M_{jk} \ddot{q}^k + K_{jk} q^k = 0 \quad (245)$$

mit Massen- und Kraftmatrix

$$M_{jk} = \delta_{jk} m, \quad K_{jk} = (-\delta_{jk-1} + 2\delta_{jk} - \delta_{jk+1}) \kappa. \quad (246)$$

- Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\left(-M_{jk}\omega_n^2 + K_{jk}\right)a_n^k = \left(-\delta_{jk-1}\kappa + \delta_{jk}(-m\omega_n^2 + 2\kappa) - \delta_{jk+1}\kappa\right)a_n^k = 0 \quad (247)$$

mit Ansatz

$$a_n^k = \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \quad (248)$$

(erfüllt periodische Randbedingungen $q^k \equiv q^{k+N}$, da $q^k = \sum_n a_n^k (A_n e^{+i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t})$):

$$\begin{aligned} \left(-M_{jk}\omega_n^2 + K_{jk}\right)a_n^k &= \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i j n}{N}\right) \left(-\exp\left(+\frac{2\pi i n}{N}\right)\kappa + (-m\omega_n^2 + 2\kappa) - \exp\left(-\frac{2\pi i n}{N}\right)\kappa\right) = \\ &= \underbrace{\exp\left(\frac{2\pi i j n}{N}\right)}_{\neq 0} \left(-m\omega_n^2 + \left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right)\kappa\right) = 0 \\ \rightarrow \omega_n^2 &= \left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right)\frac{\kappa}{m}. \end{aligned} \quad (249)$$

- ω_0^2 und $\omega_{N/2}^2$ (bei geradem N) treten nur einfach auf, \mathbf{a}_0 und $\mathbf{a}_{N/2}$ reell,

$$a_0^k = 1 \quad , \quad a_{N/2}^k = \cos(\pi k); \quad (250)$$

$\omega_n^2 = \omega_{N-n}^2$ für $1 \leq n < N/2$, d.h. entartet, zugehörige Eigenvektoren können durch Linearkombination reell gemacht werden,

$$\frac{1}{2}(a_n^k + a_{N-n}^k) = \cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \quad , \quad \frac{1}{2i}(a_n^k - a_{N-n}^k) = \sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right). \quad (251)$$

- Zweckmäßiger ist Rechnen mit komplexen Eigenvektoren:

- Normierungsbedingung $\mathbf{a}_j^T M \mathbf{a}_k = \delta_{jk}$ wird durch $\mathbf{a}_j^\dagger M \mathbf{a}_k = \delta_{jk}$ (\dagger bedeutet transponiert und komplex konjugiert) ersetzt, d.h.

$$a_n^k = \frac{1}{\sqrt{Nm}} \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right). \quad (252)$$

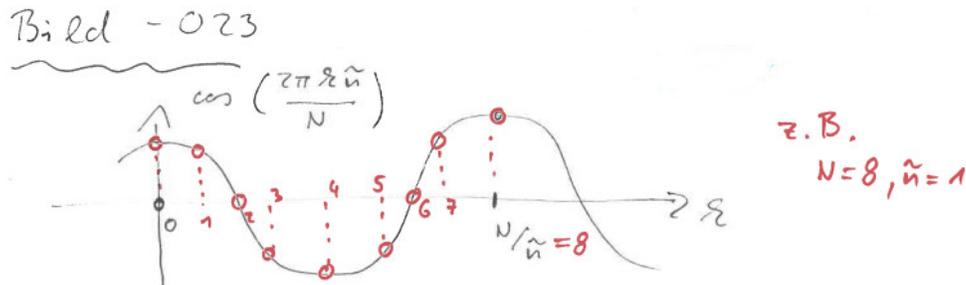
- Allgemeine komplexe Lösung der BGLs entspricht dann (227),

$$\begin{aligned} q^k &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n^k \left(A_n e^{+i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{Nm}} \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \left(A_n e^{+i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}\right). \end{aligned} \quad (253)$$

- Lösung beschreibt Wellen, z.B. nach rechts laufende cos-förmige Welle für reelles $B_{\tilde{n}} = A_{N-\tilde{n}}$ für ein spezielles $0 < \tilde{n} < N/2$, alle anderen $A_n = B_n = 0$,

$$q^k = \frac{2A_{N-\tilde{n}}}{\sqrt{Nm}} \cos\left(\frac{2\pi k\tilde{n}}{N} - \omega_{\tilde{n}}t\right) \quad (254)$$

(mit Welle ist in diesem Zusammenhang eine Funktion $f(x \pm vt)$ gemeint, wobei $x \equiv ka$; die von f vorgegebene Form bewegt sich mit Geschwindigkeit v nach links [für $x + vt$] oder nach rechts [für $x - vt$]).



- Ausbreitungsgeschwindigkeit für $\tilde{n} \ll N$ durch Vergleich der rechten Seite von (254) mit $f(ka - v_{\tilde{n}}t)$.

$$v_{\tilde{n}} = \frac{Na\omega_{\tilde{n}}}{2\pi\tilde{n}} \approx a\sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad (255)$$

wobei

$$\omega_{\tilde{n}} = \sqrt{\left(2 - 2\cos\left(\frac{2\pi\tilde{n}}{N}\right)\right)\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\left(\left(\frac{2\pi\tilde{n}}{N}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{2\pi\tilde{n}}{N}\right)^4\right)\right)\frac{\kappa}{m}} \approx \frac{2\pi\tilde{n}}{N}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad (256)$$

verwendet wurde.

- ABs bei $t = 0$: Z.B. Auslenkung eines Atoms/Moleküls um Δ .

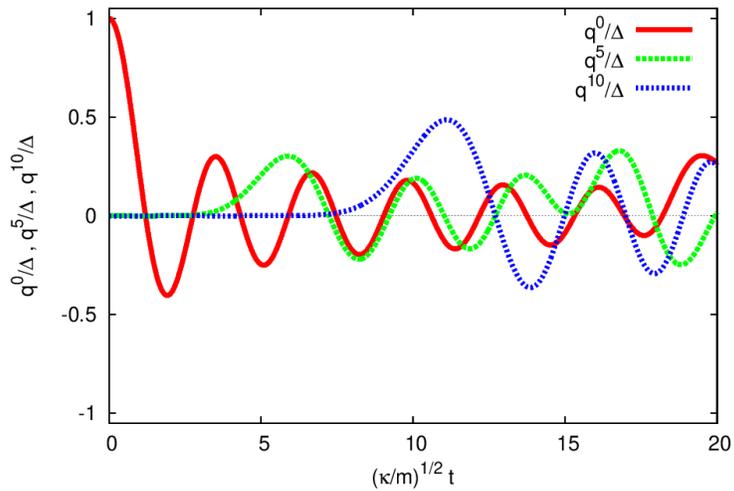
$$- \mathbf{q}_0 = (\Delta, 0, \dots, 0), \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \vec{0}.$$

$$- \mathbf{a}_j^\dagger M \mathbf{q}_0 = (1/\sqrt{Nm})m\Delta = \sqrt{m}\Delta/\sqrt{N} = A_j + B_j$$

$$\mathbf{a}_j^\dagger M \dot{\mathbf{q}}_0 = 0 = i\omega_j(A_j + B_j)$$

$$\rightarrow A_j = B_j = \sqrt{m}\Delta/2\sqrt{N}.$$

- Allgemeine Lösung wird dadurch zu spezieller Lösung, kann problemlos mit Hilfe eines Computers gezeichnet werden, im Folgenden für $N = 20$.



- Effekt der Auslenkung von Atom/Molekül 0 für Atom/Molekül 5 (Entfernung $\approx 5a$) erst nach Zeitspanne $t \approx 5/\sqrt{\kappa/m}$ sichtbar, für Atom/Molekül 10 (Entfernung $\approx 10a$) erst nach Zeitspanne $t \approx 10/\sqrt{\kappa/m}$ sichtbar; Ausbreitungsgeschwindigkeit (255) damit bestätigt.
- Phänomen der Ausbreitung von Wellen (z.B. Schallwellen) im Kristall damit qualitativ verstanden.

5 Starrer Körper

5.1 Definition, charakteristische Größen

- **Starrer Körper:**
 - N Massenpunkte: Massen m_j , Positionen \mathbf{r}_j , $j = 1, \dots, N$.
 - Zwangsbedingungen: $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| = \text{const}$, d.h. Massenpunkte bilden bewegliches Gesamtobjekt, dessen Form bleibt aber erhalten (z.B. Ball, Stock, Flugzeug, etc.).
 - Lediglich ein Modell (Deformationen des Körpers, Schwingungen seiner Atome, etc. vernachlässigt), beschreibt ausgedehnte Objekte in vielen Fällen gut.
- Häufig kontinuierliche Massenverteilung ($N \rightarrow \infty$):
 - Zweckmäßige Beschreibung, wenn z.B. $\mathcal{O}(10^{23})$ Atome ein makroskopisches ausgedehntes Objekt bilden.
 - m_j , \mathbf{r}_j , $j = 1, \dots, N$ wird ersetzt durch Dichte $\rho(\mathbf{r})$.
- Anzahl der **Freiheitsgrade** bei Bewegung im 3-dimensionalen Raum:
 - $N = 1$ (d.h. Massenpunkt): 3 (Translation).
 - $N = 2$: 3 (Translation) + 2 (Rotation).
 - $N \geq 3$: 3 (Translation) + 3 (Rotation)
(Rotation kann z.B. durch Vektor $\vec{\alpha}$ beschrieben werden mit Drehachse $\hat{\vec{\alpha}}$ und Drehwinkel $|\vec{\alpha}|$ um diese Achse).
- Charakteristische Größen eines starren Körpers über Summen oder Volumenintegrale, z.B.

- Masse

$$M = \sum_{j=1}^N m_j \quad \text{bzw.} \quad M = \int d^3r \rho(\mathbf{r}), \quad (257)$$

- Schwerpunkt

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathbf{r}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{R} = \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathbf{r}. \quad (258)$$

5.2 Rotationsmatrizen

- Definierende Eigenschaften von **Rotationsmatrizen** \mathcal{R} :
 - **Orthogonale Matrizen**, d.h. $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathbb{1}$.
 - $\det(\mathcal{R}) = 1$.

- Rotationsmatrix in 2 Dimensionen in x - y -Ebene, Drehwinkel α :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} +\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ +\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{=\mathcal{R}(\alpha)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (259)$$

$((x', y')$ ist gegenüber (x, y) entgegen dem Uhrzeigersinn um α gedreht).

- Erfüllt $\mathcal{R}^T(\alpha)\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}(\alpha)\mathcal{R}^T(\alpha) = \mathbb{1}$ und $\det(\mathcal{R}(\alpha)) = 1$.
- Norm eines Vektors verändert sich nicht bei Rotation:

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} = \sqrt{\mathbf{r}^T \mathcal{R}^T(\alpha) \mathcal{R}(\alpha) \mathbf{r}} = \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} = |\mathbf{r}| \quad (260)$$

(mit $\mathbf{r}' = (x', y')$ und $\mathbf{r} = (x, y)$).

- Inverse Rotationsmatrix zu $\mathcal{R}(\alpha)$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-\alpha) &= \begin{pmatrix} +\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ +\sin(-\alpha) & +\cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(\alpha) & +\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= (\mathcal{R}(\alpha))^T. \end{aligned} \quad (261)$$

- Rotationsmatrix in 3 Dimensionen um x -Achse, d.h. in y - z -Ebene, Winkel α :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & +\sin(\alpha) & +\cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{=\mathcal{R}_x(\alpha)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (262)$$

(analog für y - und z -Achse).

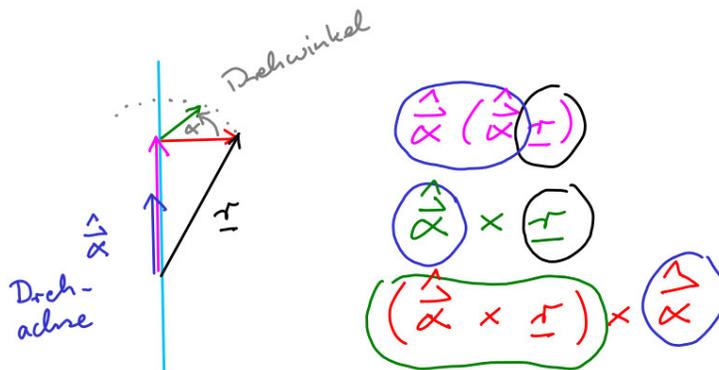
- Rotationsmatrix in 3 Dimensionen um Drehachse $\hat{\alpha} = \vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$ und Drehwinkel $\alpha = |\vec{\alpha}|$:

$$\mathbf{r}' = \underbrace{\hat{\alpha}(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{r}) + \cos(\alpha)(\hat{\alpha} \times \mathbf{r}) \times \hat{\alpha} + \sin(\alpha)\hat{\alpha} \times \mathbf{r}}_{\mathcal{R}(\hat{\alpha})\mathbf{r}} \quad (263)$$

(mit $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ und $\mathbf{r} = (x, y, z)$) bzw.

$$\mathcal{R}(\hat{\alpha}) = (1 - \cos(\alpha))\hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha} + \cos(\alpha)\mathbb{1} + \sin(\alpha) \sum_j (\hat{\alpha} \times \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_j \quad (264)$$

(dyadisches Produkt bzw. Tensorprodukt $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{jk} = a_j b_k$).



5.3 Rotation um feste Achse

- Keine Translation, o.b.d.A. Rotation um x -Achse parametrisiert durch Winkel α .
- Schwerpunkt in Abhängigkeit von α : $\mathbf{R}'(\alpha)$ ($\mathbf{R}'(\alpha = 0)$ entspricht \mathbf{R} in (258)):
 - Rotation von \mathbf{r}_j um α : $\mathbf{r}'_j(\alpha) = \mathcal{R}_x(\alpha)\mathbf{r}_j$.
 - Damit

$$\mathbf{R}'(\alpha) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathbf{r}'_j = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathcal{R}_x(\alpha) \mathbf{r}_j = \mathcal{R}_x(\alpha) \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \mathbf{r}_j = \mathcal{R}_x(\alpha) \mathbf{R}. \quad (265)$$

- Analoge Formulierung für kontinuierliche Massenverteilung:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(\alpha) &= \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathbf{r}' = \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathcal{R}_x(\alpha) \mathbf{r} = \mathcal{R}_x(\alpha) \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathbf{r} = \\ &= \mathcal{R}_x(\alpha) \mathbf{R} \end{aligned} \quad (266)$$

(Interpretation: \mathbf{r} entspricht Summationsindex j , relatives Gewicht $\frac{\rho(\mathbf{r})}{M}$ für rotierten Raumpunkt \mathbf{r}').

- Damit gezeigt: Schwerpunkt des starren Körpers rotiert mit dem starren Körper, d.h. genau wie jeder seiner Massenpunkte (wie erwartet).
- (266) kann auch alternativ hergeleitet werden:

- * Starte mit (258), rechts, wobei Dichte als α -abhängig betrachtet wird, d.h. $\rho'(\alpha, \mathbf{r})$:

$$\mathbf{R}'(\alpha) = \int d^3r \frac{\rho'(\alpha, \mathbf{r})}{M} \mathbf{r}. \quad (267)$$

- * $\rho'(\alpha, \mathbf{r}) = \rho(\mathcal{R}_x(-\alpha)\mathbf{r})$ (um α rotierte Dichte $\rho'(\alpha, \mathbf{r})$ ergibt sich, indem unrotierte Dichte ρ an "rückwärts rotiertem Punkt" $\mathcal{R}_x(-\alpha)\mathbf{r}$ ausgewertet wird).

- * Damit

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(\alpha) &= \int d^3r \frac{\rho(\mathcal{R}_x(-\alpha)\mathbf{r})}{M} \mathbf{r} = \int d^3\tilde{r} \frac{\rho(\tilde{\mathbf{r}})}{M} \mathcal{R}_x(\alpha)\tilde{\mathbf{r}} = \\ &= \mathcal{R}_x(\alpha) \underbrace{\int d^3\tilde{r} \frac{\rho(\tilde{\mathbf{r}})}{M} \tilde{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (268)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathcal{R}_x(-\alpha)\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} = \mathcal{R}_x(\alpha)\tilde{\mathbf{r}} \quad (269)$$

$$\begin{aligned} \int d^3r \dots &= \int d^3\tilde{r} \left| \det \left(\frac{\partial r_j}{\partial \tilde{r}_k} \right) \right| \dots = \int d^3\tilde{r} \underbrace{\left| \det(\mathcal{R}_x(\alpha)) \right|}_{=1} \dots = \\ &= \int d^3\tilde{r} \dots \end{aligned} \quad (270)$$

verwendet wurde.

- Ab jetzt nur noch kontinuierliche Massenverteilung (endliche Anzahl von Massenpunkten aber analog).

- Kinetische Energie eines Massenelements bei \mathbf{r}' :

$$dT = \frac{dm \mathbf{v}^2}{2} = \frac{dm (y'^2 + z'^2) \dot{\alpha}^2}{2} = \frac{dm (y^2 + z^2) \dot{\alpha}^2}{2} \quad (271)$$

($y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2$, da Rotation um x -Achse).

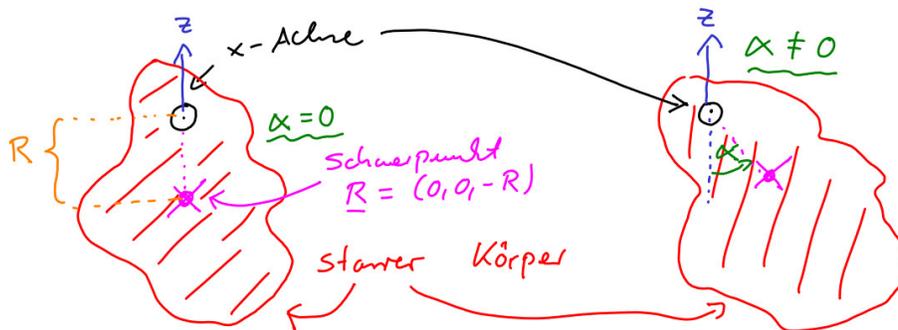
- Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})(y'^2 + z'^2) \dot{\alpha}^2}{2} = \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2) \dot{\alpha}^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int d^3r \rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2)}_{=J} \right) \dot{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (272)$$

(J bezeichnet das **Trägheitsmoment** [bezüglich der x -Achse]; Trägheitsmoment bei Drehbewegungen analog zur Masse bei Translationen [Vergleich z.B. mit $T = (1/2)m\dot{x}^2$]).

5.3.1 Physikalisches Pendel

- Betrachte Schwingungen im homogenen Schwerfeld, d.h. $\mathbf{F} = -mge_z$ (**physikalisches Pendel**).
- Wähle Ausrichtung des starren Körpers so, dass sich Schwerpunkt bei $\alpha = 0$ senkrecht unter Ursprung (damit auch unter Drehachse [= x -Achse]) befindet, d.h. $\mathbf{R}'(\alpha = 0) = \mathbf{R} = (0, 0, -R)$ (wobei $R = |\mathbf{R}| = \text{const}$ Abstand des Schwerpunkts von Drehachse ist).



- Damit und aus (262) und (266) folgt

$$\mathbf{R}'(\alpha) = \mathcal{R}_x(\alpha)\mathbf{R} = R \begin{pmatrix} 0 \\ +\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (273)$$

- Bewegungsgleichung über Energieerhaltung:

– Potentielle Energie eines Massenelements bei \mathbf{r}' :

$$dV = dm g z'. \quad (274)$$

– Potentielle Energie:

$$V = \int d^3r \rho(\mathbf{r})gz' = MgR'_z(\alpha) = -MgR \cos(\alpha)$$

((266) und ((273) wurden verwendet), d.h. Minimum der potentiellen Energie bei $\alpha = 0$ (wie erwartet).

– Energieerhaltung:

$$T + V = \frac{J}{2}\dot{\alpha}^2 - MgR \cos(\alpha) = \text{const} \quad (275)$$

bzw. für kleine Schwingungen ($\alpha \ll 1$)

$$\frac{J}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{MgR}{2}\alpha^2 = \text{const} \quad (276)$$

($\cos(\alpha) = 1 - \alpha^2/2 + \mathcal{O}(\alpha^4)$).

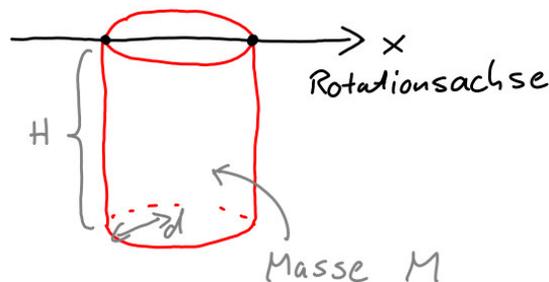
– Hat gleiche Struktur, wie Energieerhaltung des HOs in 1 Dimension ($(m/2)\dot{x}^2 + (m\omega^2/2)x^2 = \text{const}$), Lösung daher klar,

$$\alpha = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{MgR}{J}} \quad (277)$$

mit unbestimmten Konstanten A und φ .

Aufgabe

Ein entsprechend der nachfolgenden Skizze um die x -Achse drehbarer homogener Zylinder (Radius d , Höhe H , Masse M) vollführt kleine Schwingungen. Bestimme die Schwingungsdauer.



• Dichte:

$$\rho_0 = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi d^2 H}. \quad (278)$$

• Trägheitsmoment:

$$J = \int d^3r \rho(\mathbf{r})(y^2 + z^2) = \int_0^d dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H}^0 dz \rho_0 (r^2 \sin^2(\varphi) + z^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_0 \left(\underbrace{\int_0^d dr r^3}_{=d^4/4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2(\varphi)}_{=\pi} \underbrace{\int_{-H}^0 dz}_{=H} + \underbrace{\int_0^d dr r}_{=d^2/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_{-H}^0 dz z^2}_{=H^3/3} \right) = \\
&= M \left(\frac{d^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) \tag{279}
\end{aligned}$$

(Zylinderkoordinaten: Jacobi-Determinante ist r , $y = r \sin(\varphi)$).

- Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mg(H/2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{gH} \left(\frac{d^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right)}. \tag{280}$$

5.3.2 Satz von Steiner

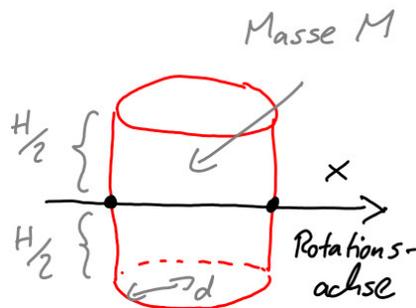
- **Satz von Steiner** stellt Beziehung zwischen Trägheitsmomenten eines starren Körpers (Masse M) bezüglich paralleler Drehachsen her:

$$J = J_{\text{SP}} + MD^2. \tag{281}$$

- J_{SP} : Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt.
- J : Trägheitsmoment bezüglich einer dazu parallelen Achse mit Abstand D .

Aufgabe

Berechne das Trägheitsmoment eines entsprechend der nachfolgenden Skizze um die x -Achse drehbaren homogenen Zylinders (Radius d , Höhe H , Masse M).



- Benutze Ergebnis aus vorangegangener Aufgabe und Satz von Steiner:

$$J_{\text{SP}} = J - M \left(\frac{H}{2} \right)^2 = M \left(\frac{d^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) - M \frac{H^2}{4} = M \left(\frac{d^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right). \tag{282}$$

- Beweis des Satzes von Steiner:

– Wähle Ausrichtung des starren Körpers so, dass Schwerpunkt im Ursprung (d.h. $\mathbf{R} = 0$) und Drehachse durch den Schwerpunkt der x -Achse entspricht.

– Damit

$$J_{\text{SP}} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (y^2 + z^2). \quad (283)$$

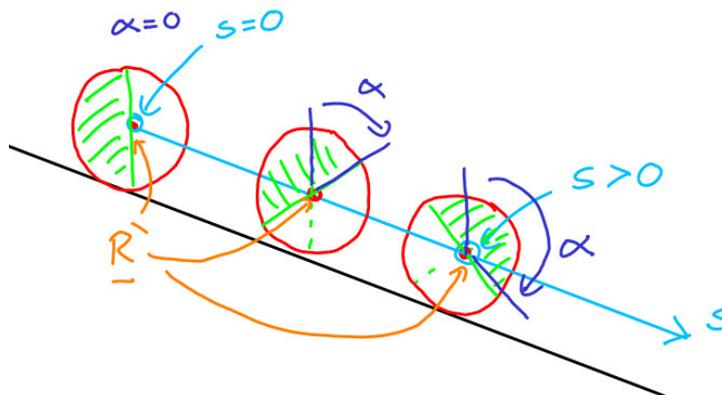
– Trägheitsmoment bezüglich einer zur x -Achse parallelen Achse, verschoben um Vektor $\vec{\Delta}$:

$$\begin{aligned} J &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left((y + \Delta_y)^2 + (z + \Delta_z)^2 \right) = \\ &= \underbrace{\int d^3r \rho(\mathbf{r}) (y^2 + z^2)}_{=J_{\text{SP}}} + 2 \left(\underbrace{\Delta_y \int d^3r \rho(\mathbf{r}) y}_{=R_y=0} + \underbrace{\Delta_z \int d^3r \rho(\mathbf{r}) z}_{=R_z=0} \right) \\ &\quad + \underbrace{\left(\Delta_y^2 + \Delta_z^2 \right) \int d^3r \rho(\mathbf{r})}_{=M} = J_{\text{SP}} + MD^2, \end{aligned} \quad (284)$$

wobei $D = \sqrt{\Delta_y^2 + \Delta_z^2}$ der Abstand der beiden Achsen ist.

5.4 Rollbewegung

- Diskutiere Rollbewegung exemplarisch anhand eines eine schiefe Ebene (Neigungswinkel β) hinunterrollenden homogenen Zylinders (Radius d , Masse M).



- Koordinaten:

– s : Zurückgelegte Strecke (Translation).

– α : Rotation des Zylinders.

– Translation und Rotation durch Zwangsbedingung gekoppelt: $s = d\alpha$ bzw. $\alpha = s/d$.

– Parametrisiere Massenelemente des Zylinders in zwei Koordinatensystemen:

* Zylindersystem: \mathbf{r} (System in dem Zylinder ruht, sein Schwerpunkt ist im Ursprung, d.h. $\mathbf{R} = 0$).

* Laborsystem: \mathbf{r}' (Schwerpunkt des Zylinders $\mathbf{R}' = s(+\cos(\beta), 0, -\sin(\beta))$).

* Damit

$$\mathbf{r}'(s, \alpha) = \mathbf{R}' + \mathcal{R}_y(\alpha)\mathbf{r} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}'(s, \alpha) = \dot{\mathbf{R}}' + \frac{d\mathcal{R}_y(\alpha)}{d\alpha}\dot{\alpha}\mathbf{r} \quad (285)$$

mit

$$\mathcal{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} +\cos(\alpha) & 0 & +\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & +\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (286)$$

wobei \mathbf{r} festgehaltener, d.h. zeitunabhängiger Punkt im Zylindersystem ist.

• Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \int_V d^3r \frac{\rho_0 \dot{\mathbf{r}}'^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\rho_0 \int_V d^3r \right)}_{=M} \dot{\mathbf{R}}'^2 + \dot{\mathbf{R}}' \frac{d\mathcal{R}_y(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha} \underbrace{\left(\rho_0 \int_V d^3r \mathbf{r} \right)}_{=M\mathbf{R}=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\rho_0 \int_V d^3r \mathbf{r}^T \left(\frac{d\mathcal{R}_y(\alpha)}{d\alpha} \right)^T \frac{d\mathcal{R}_y(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{r} \right)}_{=J} \dot{\alpha}^2 = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}'^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2}_{\text{Rotation}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(M + \frac{J}{d^2} \right) \dot{s}^2 \end{aligned} \quad (287)$$

($\int_V d^3r$: Integration über Zylindervolumen; ρ_0 : Dichte des Zylinders; J : Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich y -Achse).

• Trägheitsmoment:

$$J = \rho_0 \int_V d^3r (x^2 + z^2) = \rho_0 \int_0^d dr r \int_0^{2\pi} \varphi \int_{-H/2}^{+H/2} dy r^2 = \frac{\pi \rho_0 d^4 H}{2} = \frac{M d^2}{2} \quad (288)$$

(H : Zylinderhöhe [am Ende irrelevant]).

• Damit

$$T = \frac{3}{4} M \dot{s}^2. \quad (289)$$

• Potentielle Energie:

$$V = \int_V d^3r \rho_0 g z' = \dots = M g R'_z = -M g s \sin(\beta).$$

- Energieerhaltung:

$$T + V = \frac{3}{4}M\dot{s}^2 - Mgs \sin(\beta) = E = \text{const.} \quad (290)$$

- “Newtonsche BGl” durch Ableiten nach t :

$$\frac{3}{2}M\dot{s}\ddot{s} - Mgs \sin(\beta) = 0 \quad \text{bzw.} \quad M\ddot{s} = \frac{2}{3}Mg \sin(\beta). \quad (291)$$

- Zum Vergleich Newtonsche BGl eines Massenpunkts der Masse M , der diese Ebenen hinuntergleitet:

$$M\ddot{s} = Mg \sin(\beta), \quad (292)$$

d.h. Massenpunkt erfährt größere Beschleunigung hangabwärts, weil potentielle Energie bei Umwandlung in kinetische Energie vollständig für Translation verwendet wird und sich nicht auf Translation und Rotation aufteilt.