Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 11

vom 26.06.20, Abgabe am 03.07.20, Besprechung in der Woche vom 06.07.20

Aufgabe 1 [*Lagrange-Funktion mit Faktor $e^{\gamma t}$*] (Präsenzaufgabe 0 Pkt.)

Wie in der letzten Fragestunde besprochen, wird in den letzten beiden Tutoriums-Wochen jeweils eine Aufgabe als Präsenzaufgabe im Tutorium durchgenommen und muss nicht abgegeben werden. Wir empfehlen Euch, diese Aufgabe dennoch vorzubereiten, der vermittelte Stoff ist wie sonst auch klausurrelevant. Zu dieser Aufgabe wird kein Lösungsvideo bereitgestellt.

Die Lagrange-Funktion eines sich in einer Dimension bewegenden Teilchens sei

$$L \quad = \quad e^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right), \qquad (\gamma > 0).$$

1. Bestimme ausgehend von der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichungen.
2. Berechne den kanonisch konjugierten Impuls. Gib die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an.
3. Betrachte die Bewegungsgleichungen für $V(x) = mgx$, d.h. $V(x)$ ist die potentielle Energie des Teilchens im homogenen Schwerefeld der Erde. Welche Kräfte beschreibt die Lagrange- bzw. Hamilton-Funktion? Löse die Bewegungsgleichungen. Skizziere die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

Aufgabe 2 [*Betrachtungen im Phasenraum*] (2+2+1+2+2+1=10 Pkt.)

Ein Teilchen (Masse m) bewegt sich in einer Dimension (Koordinate x) im Potential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$.

1. Stelle die Lagrange-Funktion auf und berechne davon ausgehend die Hamilton-Funktion.
2. Stelle die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen auf und bestimme deren allgemeine Lösung.
3. Skizziere die Phasenraumtrajektorien.
4. Nachdem Du in 2. und 3. die zeitliche Entwicklung eines einzelnen Zustands, d.h. eines Punktes im Phasenraum bestimmt hast, wiederhole diese Aufgabe nun für eine Menge von Zuständen, d.h. ein endliches Volumen im Phasenraum, das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die Phasenraumellipse

$$(p, x) \quad = \quad (\tilde{P}_0 + P_0\cos(\lambda), Q_0\sin(\lambda))$$

($\tilde{P}_0$, P_0, Q_0 sind Konstanten, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$) beschrieben wird. In anderen Worten, berechne, wie sich die durch λ parametrisierte Kontur der Ellipse mit der Zeit verändert. Beschreibe Dein Ergebnis in Worten. Ist das Phasenraumvolumen der Ellipse erhalten?

Zusätzlich zu der aus obigem Potential $V(x)$ folgenden Kraft wirkt auch noch die Reibungskraft $F_R = -m\alpha\dot{x}$.

5. Skizziere die Phasenraumtrajektorien.
   Hinweis: Erweitere die Bewegungsgleichung aus 2. um den Reibungsterm und bestimme die dazugehörigen Lösungen.

6. Ist das Phasenraumvolumen noch immer erhalten?

Aufgabe 3 [*Poisson-Klammern*] `(2+1+1+1=5 Pkt.)`

1. Beweise die sogenannte **Jacobi-Identität**
$$\{A\,,\,\{B\,,\,C\}\} + \{B\,,\,\{C\,,\,A\}\} + \{C\,,\,\{A\,,\,B\}\} \quad = \quad 0.$$

2. Zeige, dass wenn $I_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$ und $I_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$ Erhaltungsgrößen sind, auch $\{I_1(\mathbf{p},\mathbf{q})\,,\,I_2(\mathbf{p},\mathbf{q})\}$ eine Erhaltungsgröße ist.

3. Zeige, dass ein System, das durch die Hamilton-Funktion
$$H \quad = \quad H_1(q_1,\ldots,q_j,p_1,\ldots,p_j) + H_2(q_{j+1},\ldots,q_f,p_{j+1},\ldots,p_f)$$
beschrieben wird, mindestens zwei Erhaltungsgrößen besitzt.

4. Zeige, dass Invarianz bezüglich Rotationen um zwei orthogonale durch den Ursprung verlaufende Drehachsen, Erhaltung des Quadrats des Drehimpulses $\mathbf{l}^2$ impliziert.

Aufgabe 4 [*Phasenraumtrajektorien des Pendels*] `(2+1+2=5 Pkt.)`

Betrachte ein ebenes Pendel (Masse m, Länge l) im konstanten Gravitationsfeld, $V(\varphi) = -mgl\cos(\varphi)$ (die generalisierte Koordinate φ beschreibt die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage).

1. Stelle die Lagrange-Funktion auf, berechne davon ausgehend die Hamilton-Funktion.

2. Stelle die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen auf.

3. Berechne die Form der Phasenraumtrajektorien $p_\varphi(\varphi)$ und skizziere diese Trajektorien sowohl für kleine als auch für große Energien. Welche spezielle Rolle spielen Trajektorien mit Energie $E = mgl$?