Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2020 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 10

vom 19.06.20, Abgabe am 26.06.20, Besprechung in der Woche vom 29.06.20

Aufgabe 1 [*Hamilton-Formalismus 1*] (1+1=2 Pkt.)

Ein Teilchen bewegt sich in der x-z-Ebene auf einer vorgegebenen Kurve $z = f(x)$ unter dem Einfluss der in z-Richtung wirkenden konstanten Schwerkraft.

1. Berechne die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion.
2. Wie lauten die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen?

Aufgabe 2 [*Hamilton-Formalismus 2*] (1+1+2+2=6 Pkt.)

1. Bestimme, ausgehend von der Lagrange-Funktion, die Hamilton-Funktion eines Massenpunktes (potentielle Energie V) in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ).
2. Drücke das Drehimpulsquadrat durch die Koordinaten (r, ϑ, φ) und die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse aus.
3. Zeige mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass für ein sphärisch symmetrisches Potential $V = V(r)$ der Drehimpuls erhalten ist.
4. Führe ausgehend von den vorliegenden Erhaltungsgrößen die Berechnung der Bahn des Massenpunkts auf Integrale zurück. Verwende unter anderem die Drehimpulserhaltung und gehe von einem sphärisch symmetrischem Potential $V = V(r)$ aus.

Aufgabe 3 [*Poisson-Klammern*] (1+3=4 Pkt.)

Betrachte die folgende Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\gamma}{|\mathbf{r}|}.$$

1. Um welches bekannte physikalische Problem handelt es sich?
2. Zeige mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass der Runge-Lenz-Vektor

   $$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} + m\gamma \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

   ($\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist der Drehimpuls) eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 4 [*Hamiltonische Bewegungsgleichungen*] `(4+4=8 Pkt.)`

Ein Massepunkt m bewegt sich in einem zylindersymmetrischen Potential $V(\rho, z)$. Bestimme die Hamilton-Funktion und die hamiltonischen Bewegungsgleichungen bezüglich eines Koordinatensystems, das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Symmetrieachse rotiert in:

1. kartesischen Koordinaten (x', y', z'),
2. Zylinderkoordinaten (ρ', φ', z').

Hinweis: Ein möglicher Ansatz ist, für 2. den Zusammenhang zwischen x', y' und ρ', φ' und die Ergebnisse aus 1. zu verwenden, um die Hamilton-Funktion in Zylinderkoordinaten des bewegten Systems zu transformieren.