Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2020 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 7

vom 29.05.20, Abgabe am 05.06.20, Besprechung in der Woche vom 08.06.20

Aufgabe 1 [*Balkenbiegung*] (2+1+2+2=7 Pkt.)

Ein gebogener Balken sei durch die Funktion $y(x)$ beschrieben (x: horizontale Koordinate; y: vertikale Koordinate). Die Energie eines "im Wesentlichen waagrechten" Balkens, das heißt eines Balkens mit $\partial y/\partial x \ll 1$, der nicht auf Zug/Druck eingespannt ist und auf den eine Kraftdichte $f(x)$ in y-Richtung ausgeübt wird, lautet

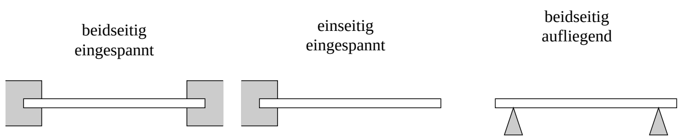
$$E[y] \quad = \quad \int_0^L dx \left(-\frac{k}{2} y''^2 + f(x) y \right) \quad , \quad y'' \quad = \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

(L: Balkenlänge; k: materialabhängige Konstante).

1. Ein statischer Balken hat eine Form, die die Energie E minimiert, d.h. es gilt $\delta E = 0$ für beliebige infinitesimale Formänderung δy. Leite daraus mit Hilfe von Variationsrechnung die Differentialgleichung her, die einen solchen Balken beschreibt, sowie zusätzlich auftretende Randbedingungen.

2. Verwende Deine Ergebnisse aus 1. um $y(x)$ für einen statischen Balken im Schwerefeld der Erde ($f(x) = -\rho g$; ρ: konstante Massendichte des Balkens) für die folgenden drei Fälle zu berechnen:

   - Beidseitig waagrecht eingespannter Balken: $y(0) = y(L) = 0$, $y'(0) = y'(L) = 0$.
   - Einseitig waagrecht eingespannter Balken: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
   - Beidseitig aufliegender Balken: $y(0) = y(L) = 0$.



Aufgabe 2 [*Freie Bewegung auf Kugelfläche*] (4+4+1+1=10 Pkt.)

Betrachte ein Teilchen (Masse m), das sich ohne Einfluss von Kräften auf einer Kugelfläche mit Radius R bewegt.

1. Verwende in dieser Teilaufgabe die Winkel $(q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi)$ der Standardkugelkoordinaten als generalisierte Koordinaten.

   - Berechne den metrischen Tensor g_{jk} und gib die Lagrange-Funktion an.

- Leite mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen ab.
- Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der ϑ-Koordinatenlinien Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind.
- Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der φ-Koordinatenlinien im Allgemeinen keine Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind. Gibt es Ausnahmen?

2. In der stereographischen Projektion wird ein Punkt P auf der Kugelfläche durch die Polarkoordinaten $(q'^1, q'^2) = (r', \varphi')$ eines Punktes $\tilde{P}$ in der Ebene E dargestellt:

   - E ist diejenige Ebene, die den Äquator der Kugel (also $\vartheta = \pi/2$) enthält.
   - $\tilde{P}$ ist der Schnittpunkt von E mit der Geraden durch P und den Nordpol der Kugel (also $\vartheta = 0$).

   Verwende in dieser Teilaufgabe $(q'^1, q'^2) = (r', \varphi')$ als generalisierte Koordinaten.

   - Drücke Punkte in kartestischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)$ auf der Kugelfläche durch Koordinaten (r', φ') aus, d.h. bestimme $\mathbf{r}(r', \varphi')$. Berechne davon ausgehend den metrischen Tensor g'_{jk} und gib die Lagrange-Funktion an.
   - Leite mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen ab.
   - Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der r'-Koordinatenlinien keine Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind. Warum ist dies nach erfolgreich erledigter Teilaufgabe für "ϑ-Koordinatenlinien" zu erwarten?
   - Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der φ'-Koordinatenlinien im Allgemeinen keine Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind. Gibt es Ausnahmen?

3. Bestimme die Beziehung zwischen (ϑ, φ) und (r', φ'), d.h. finde $r'(\vartheta, \varphi)$ und $\varphi'(\vartheta, \varphi)$? Erläutere damit die Beziehung zwischen ϑ-, φ-Koordinatenlinien und r'-, φ'-Koordinatenlinien.

4. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich der metrische Tensor unter Koordinatentrasformationen gemäß

   $$g_{jk} = \frac{\partial q'^m}{\partial q^j} \frac{\partial q'^n}{\partial q^k} g'_{mn} \tag{2}$$

   transformiert. Verifiziere diese Formel, indem Du Deinen gefundenen metrischen Tensor für (r', φ')-Koordinaten (aus Teilaufgabe 2.) in den metrischen Tensor für (ϑ, φ)-Koordinaten transformierst und mit Deinem in Teilaufgabe 1. erzielten entsprechenden Ergebnis vergleichst.

Aufgabe 3 [*Schwingende Feder*] `(2+1=3 Pkt.)`

Ein Massepunkt m führt eine Bewegung in der yz-Ebene aus. Der Massepunkt ist an einer Feder mit Federkonstante k im homogenen Gravitationsfeld der Erde aufgehängt. Die Feder hat in Ruhelage eine Länge r_0 und ist so befestigt, dass sie zusätzlich zur Federschwingung eine ebene Pendelbewegung ausführt (siehe Skizze).

1. Stelle die Lagrange-Funktion des Federpendels auf und leite mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen in geeigneten generalisierten Koordinaten her.

2. Löse die Bewegungsgleichungen für kleine Winkelauslenkungen $|\varphi| \ll 1$ und kleine Auslenkungen aus der Ruhelage $|r| \ll 1$.