Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2020 – Prof. Marc Wagner

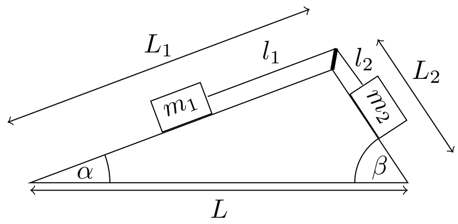
Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 6

vom 22.05.20, Abgabe am 29.05.20, Besprechung in der Woche vom 01.06.20

Aufgabe 1 [*Massen auf schiefer Ebene*] (2+2=4 Pkt.)

Auf einer schiefen Ebene sind zwei durch ein Seil verbundene Massenpunkte wie in der Skizze dargestellt platziert. Das Seil hat eine konstante Länge l und die Bewegungen der Massenpunkte erfolgt vollkommen reibungsfrei.



1. Welche Zwangsbedingungen gibt es? Drücke die kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch generalisierte Koordinaten aus.
2. Stelle die Lagrange-Funktion für das System auf und bestimme mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten.

Aufgabe 2 [*Beltrami-Identität*] (2+2=4 Pkt.)

Ist die Lagrange-Funktion zeitunabhängig, d.h. sie hat die Form $L(\dot{q}, q)$ und hängt nur von q und $\dot{q}$ nicht aber explizit von der Zeit t ab, so ist die sogenannte **Beltrami-Identität**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L \quad = \quad \text{const} \tag{1}$$

äquivalent zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \quad = \quad 0. \tag{2}$$

1. Beweise die Beltrami-Identität ausgehend von der Euler-Lagrange-Gleichung.
2. Stelle die Lagrange-Funktion eines Teilchens (Masse m) in einem Potential $V(x)$ für eine Raumdimension x auf und benutze die Beltrami-Identität, um die Bewegungsgleichung herzuleiten. Wiederhole die Herleitung der Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung. Vergleiche und interpretiere Deine Ergebnisse.

Aufgabe 3 [*Brachistochrone*] (2+2+1+1=6 Pkt.)

Zwischen zwei auf verschiedener Höhe y gelegenen Punkten $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$ und $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ ($x_1 > x_0 = 0$, $y_1 < y_0 = 0$) ist eine Verbindungskurve $y(x)$ ("Brachistochrone") derart zu bestimmen, dass die "Fallzeit" eines Teilchens minimal wird, das sich unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_y$ reibungsfrei entlang dieser Kurve von $\mathbf{P}_0$ nach $\mathbf{P}_1$ bewegt (am Ausgangspunkt $\mathbf{P}_0$ sei das Teilchen in Ruhe).

1. Formuliere das Variationsproblem, das heißt gib ein geeignetes zu minimierendes Funktional an.
   Hinweis: Drücke die Fallzeit als Integral aus, in dem die Geschwindigkeit auftritt. Dieses Integral ähnelt dem Wirkungsfunktional $S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$ und ermöglicht die Bestimmung der Lagrange-Gleichung; Verwende den Energiesatz, um die Geschwindigkeit durch y auszudrücken.

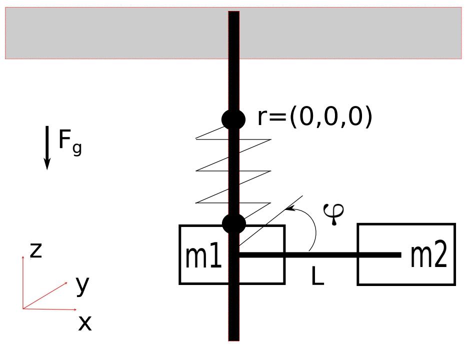
2. Bestimme mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Differentialgleichung für die Brachistochrone. (Die DGL soll nicht gelöst werden.)
   Hinweis: Zur finalen Umformung ist die Ableitung $\frac{d}{dx}(y(1+y'^2)) = y'(1+y'^2) + 2y'y''$ nützlich.

3. Bestimme mit Hilfe der Beltrami-Identität die Differentialgleichung des Brachistochronen-Systems. (Die DGL soll nicht gelöst werden.) Zeige durch explizite Rechnung, dass diese Differentialgleichung und die der vorherigen Teilaufgabe äquivalent sind.

4. Eine Parameterdarstellung der Brachistochrone lautet
   $x(\alpha) = R(\alpha - \sin(\alpha))$, $y(\alpha) = R(\cos(\alpha) - 1)$. Zeige, dass diese Darstellung die in 2. bzw. 3. hergeleitete Differentialgleichung erfüllt.

Aufgabe 4

Ein auf einer senkrechten Stange unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft gleitender Massenpunkt (Masse m_1) ist über eine Feder (Federkonstante k, Ruhelänge 0) mit der Stange verbunden. Über eine weitere Stange der Länge L (bildet stets einen 90°-Winkel zur ersten Stange, ist ansonsten drehbar) ist dieser Massenpunkt mit einem zweiten Massenpunkt (Masse m_2) verbunden (siehe Bild).



1. Verwende generalisierte Koordinaten (z, φ) und stelle die Lagrange-Funktion auf.

2. Bestimme die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.
3. Bestimme die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.
4. Bestimme die spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen für $\mathbf{r}_1(t=0) = (0,0,0)$, $\dot{\mathbf{r}}_1(t=0) = (0,0,0)$, $\mathbf{r}_2(t=0) = (L,0,0)$, $\dot{\mathbf{r}}_2(t=0) = (0,u,0)$.