Theoretische Physik 2 - Mechanik

Sommersemester 2020 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 3

vom 01.05.20, Abgabe am 08.05.20, Besprechung in der Woche vom 11.05.20

Aufgabe 1 [*Boost in beliebige Richtung*] (2+3+2+3=10 Pkt.)

1. Leite durch Hintereinanderausführung von zwei parallelen Boosts die in der Vorlesung bestimmte Formel zur relativistischen Kombination (Addition) von Geschwindigkeiten her.

2. Bisher wurden immer nur Boosts entlang einer Koordinaten-Achse betrachtet. Ziel dieser Teilaufgabe ist es nun, die Matrix für einen Boost in beliebige Richtung aufzustellen. Betrachte dazu das Bezugssystem Σ', welches sich mit der Geschwindigkeit $c\vec{\beta}$ relativ zum Bezugssystem Σ bewegt. Gehe zur Aufstellung der allgemeinen Boost-Matrix folgendermaßen vor:

   (a) Betrachte den Vektor $\vec{r}$ im Bezugssystem Σ, der sich als $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$ darstellen lässt, wobei $\vec{r}_{\perp}$ orthogonal und $\vec{r}_{\parallel}$ parallel zu $\vec{\beta}$ ist. Drücke $\vec{r}_{\perp}$ und $\vec{r}_{\parallel}$ jeweils durch $\vec{\beta}$ und $\vec{r}$ aus.

   (b) Schreibe ct, $\vec{r}_{\parallel}$, $\vec{r}_{\perp}$ und damit auch $\vec{r}$ als Funktion von ct', $\vec{r'}_{\parallel}$, $\vec{r'}_{\perp}$, $\vec{\beta}$ und $\gamma = \left(1 - \vec{\beta}^2\right)^{-1/2}$.

   (c) Gib die Boost-Matrix an.

3. Zeige, dass jeder Boost Λ zur Lorentz-Gruppe gehört (d.h., $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ erfüllt ist).

4. Leite mit Hilfe von 2. die allgemeine Formel zur Kombination von Geschwindigkeiten her, d.h. den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ in Σ und $\vec{u'} = \frac{\mathrm{d}\vec{r'}}{\mathrm{d}t'}$ in Σ' bei einem Boost mit $\vec{v} = c\vec{\beta}$. ($\vec{u}$ und $\vec{v}$ können in beliebige Richtungen zeigen). Wende hierzu die in 2. gefundenen Ergebnisse auf $\mathrm{d}\vec{r}$ und $\mathrm{d}t$ an und drücke $\vec{u}$ durch $\vec{u'}$, γ und $\vec{\beta}$ aus.

Aufgabe 2 [*Rapidität, Geschwindigkeit und Hyperbelfunktionen*] (1+1+1=3 Pkt.)

1. Beweise, dass $\mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ gilt. Nutze dies, um $e^{2\,\mathrm{artanh}(x)} = \frac{1+x}{1-x}$ zu zeigen.

2. Betrachte die gleichgerichteten Geschwindigkeiten $c\beta_1$ und $c\beta_2$ und zeige, dass diese relativistisch kombiniert Geschwindigkeit $c\beta$ liefern gemäß:

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2} \tag{1}$$

(Hinweis: Es ist zweckmäßig, zunächst Rapiditäten zu kombinieren und am Ende dann in Geschwindigkeiten umzurechnen.)

3. Ein Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit v und Rapidität θ. Zeige, dass für die Endgeschwindigkeit v_f, die nach n-facher Kombination von v erreicht ist, die folgende Formel gilt:

$$v_f = c\frac{(e^{2\theta})^n - 1}{(e^{2\theta})^n + 1} \tag{2}$$

(Hinweis: $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$, wobei $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ durch Exponentialfunktionen ausgedrückt werden können.)

Aufgabe 3 [*Obere und untere Indizes*] `(1+1+1+2+2=7 Pkt.)`

1. Leite

$$(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \tag{3}$$

her, indem Du die definierende Eigenschaft von Lorentz-Transformationen $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}$ benutzt.

2. Zeige, dass der folgende Vektor kovariant ist:

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4}$$

(also wie $\partial'_\mu = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\partial_\nu$ transformiert).

3. Überprüfe, ob die folgenden Terme Lorentz-invariant sind:
(a) $\partial_\mu x^\mu$ (b) $\vec{x}^2$ (c) $x^\mu x_\mu$ (d) $x^\mu x^\nu$

4. In der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik existiert ein Lorentz-Tensor $F^{\mu\nu}$, der $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder wie folgt beinhaltet:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ein solches Objekt mit zwei Lorentz-Indizes nennt man einen Tensor zweiter Stufe. Die Indizes werden genauso wie beim Raumzeit Vektor x^μ behandelt, z.B. gilt $F_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}$ bzw. $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}$

(a) Drücke $F_{\mu}{}^{\nu}, F_{\mu\nu}$ und $F^{\mu}{}_{\nu}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

(b) Drücke $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu$, $F_\mu{}^\mu$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

5. Wende einen Boost in x-Richtung auf $F^{\mu\nu}$ an und gib die neuen elektrischen ($\vec{E}'$) und magnetischen ($\vec{B}'$) Felder als Funktion der alten Felder an. Was fällt Dir auf?