Prof. Marc Wagner
ITP, Universität Frankfurt - SS 2016

Organisation Übungen: Arthur Dromard Raum 2.107 dromard@th.physik.uni-frankfurt.de

---

Blatt 8

vom 27.05.2016, Abgabe am 03.06.2016 in der Vorlesung

27) Teilchen im elektromagnetischen Feld (schriftlich) *(3 Punkte)*

Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld lautet

$$L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) \quad = \quad \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t) - eA^0(\vec{r}, t).$$

Dabei sind E-Feld und B-Feld wie folgt durch das Eichfeld $(A^0(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t))$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \vec{E} \quad &= \quad -\vec{\nabla}A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\ \vec{B} \quad &= \quad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}. \end{aligned}$$

Leite die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen her und drücke darin das Eichfeld durch die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

28) Balkenbiegung (schriftlich) *(2+1+2+2=7 Punkte)*

Ein gebogener Balken sei durch die Funktion $y(x)$ beschrieben (x: horizontale Koordinate; y: vertikale Koordinate). Die Energie eines "im Wesentlichen waagrechten" Balkens, das heißt eines Balkens mit $\partial y/\partial x \ll 1$, der nicht auf Zug/Druck eingespannt ist und auf den eine Kraftdichte $f(x)$ in y-Richtung ausgeübt wird, lautet

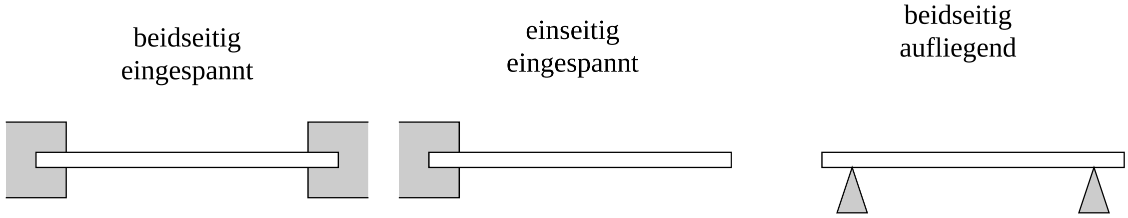
$$E[y] \quad = \quad \int_0^L dx \left(-\frac{k}{2}y''^2 + f(x)y \right) \quad , \quad y'' \quad = \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(L: Balkenlänge; k: materialabhängige Konstante).

i. Ein statischer Balken hat eine Form, die die Energie E minimiert, d.h. es gilt $\delta E = 0$ für beliebige infinitesimale Formänderung δy. Leite daraus mit Hilfe von Variationsrechnung die Differentialgleichung her, die einen solchen Balken beschreibt, sowie zusätzlich auftretende Randbedingungen.

ii. Verwende Deine Ergebnisse aus i. um $y(x)$ für einen statischen Balken im Schwerefeld der Erde ($f(x) = -\rho g$; ρ: konstante Massendichte des Balkens) für die folgenden drei Fälle zu berechnen:

- Beidseitig waagrecht eingespannter Balken: $y(0) = y(L) = 0$, $y'(0) = y'(L) = 0$.
- Einseitig waagrecht eingespannter Balken: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
- Beidseitig aufliegender Balken: $y(0) = y(L) = 0$.



29) Freie Bewegung auf Kugelfläche (mündlich) ***(4+4+1+1=10 Punkte)***

Betrachte ein Teilchen (Masse m), das sich ohne Einfluss von Kräften auf einer Kugelfläche mit Radius R bewegt.

i. Verwende in dieser Teilaufgabe die Winkel $(q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi)$ der Standardkugelkoordinaten als generalisierte Koordinaten.

   - Berechne den metrischen Tensor g_{jk} und gib die Lagrange-Funktion an.
   - Leite mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen ab.
   - Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der ϑ-Koordinatenlinien Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind.
   - Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der φ-Koordinatenlinien im Allgemeinen keine Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind. Gibt es Ausnahmen?

ii. In der stereographischen Projektion wird ein Punkt P auf der Kugelfläche durch die Polarkoordinaten $(q'^1, q'^2) = (r', \varphi')$ eines Punktes $\tilde{P}$ in der Ebene E dargestellt:

   - E ist diejenige Ebene, die den Äquator der Kugel (also $\vartheta = \pi/2$) enthält.
   - $\tilde{P}$ ist der Schnittpunkt von E mit der Geraden durch P und den Nordpol der Kugel (also $\vartheta = 0$).

   Verwende in dieser Teilaufgabe $(q'^1, q'^2) = (r', \varphi')$ als generalisierte Koordinaten.

   - Drücke Punkte in kartestischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)$ auf der Kugelfläche durch Koordinaten (r', φ') aus, d.h. bestimme $\mathbf{r}(r', \varphi')$. Berechne davon ausgehend den metrischen Tensor g'_{jk} und gib die Lagrange-Funktion an.
   - Leite mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen ab.
   - Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der r'-Koordinatenlinien keine Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind. Warum ist dies nach erfolgreich erledigter Teilaufgabe für "ϑ-Koordinatenlinien" zu erwarten?
   - Zeige, dass Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit entlang der φ'-Koordinatenlinien im Allgemeinen keine Lösungen dieser Bewegungsgleichungen sind. Gibt es Ausnahmen?

iii. Bestimme die Beziehung zwischen (ϑ, φ) und (r', φ'), d.h. finde $r'(\vartheta, \varphi)$ und $\varphi'(\vartheta, \varphi)$? Erläutere damit die Beziehung zwischen ϑ-, φ-Koordinatenlinien und r'-, φ'-Koordinatenlinien.

iv. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich der metrische Tensor unter Koordinatentrasformationen gemäß

$$g_{jk} \quad = \quad \frac{\partial q'^m}{\partial q^j} \frac{\partial q'^n}{\partial q^k} g'_{mn}$$

transformiert. Verifiziere diese Formel, indem Du Deinen gefundenen metrischen Tensor für (r', φ')-Koordinaten (aus Teilaufgabe ii.) in den metrischen Tensor für (ϑ, φ)-Koordinaten transformierst und mit Deinem in Teilaufgabe i. erzielten entsprechenden Ergebnis vergleichst.