Organisation Übungen: **Arthur Dromard** **Raum 2.107** **dromard@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 7

vom 20.05.2016, Abgabe am 27.05.2016 in der Vorlesung

23) Diskrete Mechanik (schriftlich) *(2+2=4 Punkte)*

Häufig ist es notwendig, die Gleichungen der Mechanik zu diskretisieren, z.B. wenn numerische Rechnungen ausgeführt werden müssen. Die Trajektorie $\mathbf{r}(t)$, $t \in [t_i, t_f]$ wird dann durch $3(N+1)$ Variablen $\mathbf{r}_j$, $j = 0, \ldots, N$ ersetzt mit den Entsprechungen

$j \equiv t_i + j\Delta t$, wobei $\Delta t = (t_f - t_i)/N$,

$\mathbf{r}_j \equiv \mathbf{r}(t_i + j\Delta t)$.

Die Wirkung dieser "diskreten Mechanik" ist kein Funktional, sondern eine Funktion in den $3(N+1)$ Variablen $\mathbf{r}_j$,

$$S(\mathbf{r}_j) = \sum_{j=1}^{N} \Delta t \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_j^2 - \frac{1}{2}\Big(U(\mathbf{r}_j) + U(\mathbf{r}_{j-1})\Big)\right)$$

mit

$$\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}}{\Delta t}.$$

Dabei ist $U(\mathbf{r})$ die potentielle Energie.

Analog zur in der Vorlesung diskutierten "kontinuierlichen Mechanik" ergeben sich die Bewegungsgleichungen aus der Forderung $dS = 0$ bei beliebiger Variation $d\mathbf{r}_j$, $j = 1, \ldots, N-1$, d.h. die Randwerte $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_f$ werden festgehalten.

i. Leite die Bewegungsgleichungen der diskreten Mechanik her, indem Du S minimierst, und interpretiere Dein Ergebnis, durch Vergleich mit den bekannten Bewegungsgleichungen der kontinuierlichen Mechanik.

ii. Berechne die diskreten Trajektorien $(\mathbf{r}_j)$ für $U(\mathbf{r}) = 0$ sowie für $U(\mathbf{r}) = mgz$. Vergleiche mit den entsprechenden kontinuierlichen Trajektorien.

24) Beltrami-Identität (mündlich) *(2+2=4 Punkte)*

In Fällen, in denen die Lagrange-Funktion die Form $L(\dot{q}, q)$ hat, also nur von einer Koordinate q und deren Zeitableitung abhängt, nicht aber explizit von der Zeit t, ist die sogenannte **Beltrami-Identität**

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \text{const} \tag{1}$$

äquivalent zur Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{2}$$

i. Beweise die Beltrami-Identität ausgehend von der Euler-Lagrange-Gleichung.

ii. Stelle die Lagrange-Funktion eines Teilchens (Masse m) in einer Raumdimension x in einem Potential $V(x)$ auf und benutze die Beltrami-Identität, um die Bewegungsgleichung herzuleiten. Wiederhole die Herleitung der Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung. Vergleiche und interpretiere Deine Ergebnisse.

25) Brachistochrone (schriftlich) *(2+2+1+1=6 Punkte)*

Zwischen zwei auf verschiedener Höhe y gelegenen Punkten $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ und $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ $(x_1 > x_0 = 0,\, y_1 < y_0 = 0)$ ist eine Verbindungskurve $y(x)$ ("Brachistochrone") derart zu bestimmen, dass die "Fallzeit" eines Teilchens minimal wird, das sich unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_y$ reibungsfrei entlang dieser Kurve von $\mathbf{P}_0$ nach $\mathbf{P}_1$ bewegt (am Ausgangspunkt $\mathbf{P}_0$ sei das Teilchen in Ruhe).

i. Formuliere das Variationsproblem, das heißt gib ein geeignetes zu minimierendes Funktional an.
Hinweis: Drücke die Fallzeit als Integral aus, in dem die Geschwindigkeit auftritt; Verwende den Energiesatz, um die Geschwindigkeit durch y auszudrücken.

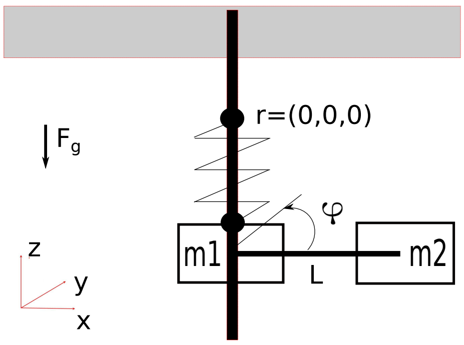
ii. Bestimme mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung eine Differentialgleichung, deren Lösung die Brachistochrone ist.

iii. Bestimme mit Hilfe der Beltrami-Identität eine Differentialgleichung, deren Lösung die Brachistochrone ist. Zeige durch explizite Rechnung, dass diese Differentialgleichung und die der vorherigen Teilaufgabe äquivalent sind.

iv. Eine Parameterdarstellung der Brachistochrone lautet
$x(\alpha) = R(\alpha - \sin(\alpha))$, $y(\alpha) = R(\cos(\alpha) - 1)$. Zeige, dass diese Darstellung die in ii. bzw. iii. hergeleitete Differentialgleichung erfüllt.

26) Feder und Massenpunkt (mündlich) *(1+2+2+1=6 Punkte)*

Ein auf einer senkrechten Stange unter dem Einfluss der konstanten Schwerkraft gleitender Massenpunkt (Masse m_1) ist über eine Feder (Federkonstante k, Ruhelänge 0) mit der Stange verbunden. Über eine weitere Stange der Länge L (bildet stets einen 90°-Winkel zur ersten Stange, ist ansonsten drehbar) ist dieser Massenpunkt mit einem zweiten Massenpunkt (Masse m_2) verbunden (siehe Bild).



i. Verwende generalisierte Koordinaten (z, φ) und stelle die Lagrange-Funktion auf.

ii. Bestimme die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

iii. Bestimme die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.

iv. Bestimme die spezielle Lösung der Bewegungsgleichungen für
$\mathbf{r}_1(t = 0) = (0, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}_1(t = 0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}_2(t = 0) = (L, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}}_2(t = 0) = (0, u, 0)$.