

Blatt 3

vom 22.04.2016, Abgabe am 29.04.2016 in der Vorlesung

8) Boost in beliebiger Richtung (schriftlich) (2+3+2+3=10 Punkte)

- i. Leite durch Hintereinanderausführung von zwei parallelen Boosts die in der Vorlesung bestimmte Formel zur relativistischen Kombination (Addition) von Geschwindigkeiten her.
- ii. Ziel dieser Teilaufgabe ist es die Matrix für einen Boost in beliebiger Richtung aufzustellen. Betrachte dazu das Bezugssystem Σ' , welches sich mit der Geschwindigkeit $c\vec{\beta}$ relativ zum Bezugssystem Σ bewegt.
 - (a) Betrachte den Vektor \vec{r} im Bezugssystem Σ , der sich als $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$ darstellen lässt, wobei \vec{r}_{\perp} orthogonal und \vec{r}_{\parallel} parallel zu $\vec{\beta}$ ist. Drücke \vec{r}_{\perp} und \vec{r}_{\parallel} jeweils durch $\vec{\beta}$ und \vec{r} aus.
 - (b) Schreibe ct , \vec{r}_{\parallel} und \vec{r}_{\perp} als Funktion von ct' , \vec{r}'_{\parallel} , \vec{r}'_{\perp} , $\vec{\beta}$ und $\gamma = (1 - \vec{\beta}^2)^{-1/2}$.
 - (c) Gib die Boost-Matrix an.
- iii. Zeige, dass jeder Boost Λ zur Lorentz-Gruppe gehört (d.h., $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ erfüllt ist).
- iv. Leite mit Hilfe von ii. die allgemeine Formel zur Kombination von Geschwindigkeiten her (d.h. zwei Geschwindigkeiten $\vec{v} = c\vec{\beta}$ und $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ in beliebige Richtungen), indem Du die gefundenen Ergebnisse aus ii. auf $d\vec{r}$ und dt anwendest.

9) Rapidität, Geschwindigkeit und Hyperbelfunktionen (mündlich) (1+1+1=3 Punkte)

- i. Beweise, dass $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ gilt. Nutze dies, um $e^{-2 \tanh^{-1}(x)} = \frac{1+x}{1-x}$ zu zeigen.
- ii. Betrachte die gleichgerichteten Geschwindigkeiten $\beta_1 c$ und $\beta_2 c$ und zeige, dass diese relativistisch kombiniert Geschwindigkeit βc liefern gemäß:

$$\frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2}. \quad (1)$$

(Hinweis: Es ist zweckmäßig zunächst Rapiditäten zu kombinieren und am Ende dann in Geschwindigkeiten umzurechnen.)

- iii. Ein Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit v und Rapidität θ . Zeige, dass für die Endgeschwindigkeit v_f , die nach n -facher Kombination von v erreicht ist, die folgende Formel gilt ($y = e^{2\theta}$):

$$v_f = c \frac{y^n - 1}{y^n + 1}. \quad (2)$$

(Hinweis: $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$, wobei $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ durch Exponentialfunktionen ausgedrückt werden können.)

10) Untere und obere Indizes (mündlich) (1+1+1+2+2=7 Punkte)

i. Leite

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \quad (3)$$

her, indem Du die definierende Eigenschaft von Lorentz-Transformationen $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu$ benutzt.

ii. Zeige, dass der folgende Vektor kovariant ist:

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

(also wie $\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$ transformiert).

iii. Berechne $\partial_\mu x^\mu$.

iv. In der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik existiert ein Lorentz-Tensor $F^{\mu\nu}$, der \vec{E} - und \vec{B} -Felder wie folgt beinhaltet:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Ein solches Objekt mit zwei Lorentz-Indizes nennt man einen Tensor zweiter Stufe. Die Indizes werden genauso wie beim Raumzeit Vektor x^μ behandelt, z.B. gilt $F_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu}$ bzw. $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$

(a) Drücke $F_\mu{}^\nu$, $F_{\mu\nu}$ und $F^\mu{}_\nu$ durch \vec{E} und \vec{B} aus.

(b) Drücke $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu$, $F_\mu{}^\mu$ durch \vec{E} und \vec{B} aus.

v. Wende einen Boost in x -Richtung auf $F^{\mu\nu}$ an und gib die neuen elektrischen (\vec{E}') und magnetischen (\vec{B}') Felder als Funktion der alten Felder an.