

Theoretische Physik 1

Mathematische Methoden

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Wintersemester 2026/27

Version: 22. Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	3
2	Kinematik von Massenpunkten	4
2.1	Grundlagen der Vektorrechnung	4
2.2	Geschwindigkeit und Beschleunigung	8
2.2.1	Geschwindigkeit	8
2.2.2	Beschleunigung	9
2.2.3	Beispiel: Kreisbewegung	10
3	Dynamik von Massenpunkten (Grundlagen)	11
3.1	Newtonsche Axiome	11
3.2	Typische in der Mechanik auftretende Kräfte	12
3.3	Lösung der Newtonschen BGl für spezielle “einfache Kräfte” (1)	13
3.3.1	Verschwindende Kraft $\mathbf{F} = 0$	14

1 Vorbemerkungen

- Ziel der Physik: Vermessung, Beschreibung und Verständnis der Naturgesetze.
- Experimentelle Wissenschaft ... theoretische Aussagen nur sinnvoll, wenn
 - durch Experiment nachprüfbar bzw. mit existierenden Experimenten verträglich,
 - diese Vorhersagekraft besitzen, d.h. der Ausgang zukünftiger Experimente mit ihrer Hilfe vorhergesagt werden kann.
- Ziele der theoretischen Physik:
 - Mathematische Beschreibung der Naturgesetze.
 - Zurückführen scheinbar unterschiedlicher physikalischer Phänomene auf eine mathematische Formel/ein Grundprinzip
→ Vereinheitlichung.
 - Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung beschreibt geradlinige Bewegung eines “freien Teilchens”, Wurfparabel eines fliegenden Balls und ellipsenförmige Bewegung von Planeten um ihre Sonne.
 - Man will nicht 1000 Formeln für 1000 Phänomene ... dann hat man nichts gelernt. Man will eine (Welt-)Formel, die alles beschreibt.
- Theoretische Physik 1 bis 5:
 - 2× Mechanik.
 - Elektrodynamik.
 - Quantenmechanik.
 - Statistische Physik.
- Inhalt von “Theoretische Physik 1– Mathematische Methoden”:
 - Mathematische Grundlagen anhand von physikalischen Beispielen.
 - Newtonsche Mechanik (Bewegung makroskopischer Objekte mit kleinen Geschwindigkeiten, z.B. fallende Steine, kreisende Planeten).
 - Eventuell spezielle Relativitätstheorie (Bewegung makroskopischer Objekte mit nahezu Lichtgeschwindigkeit).

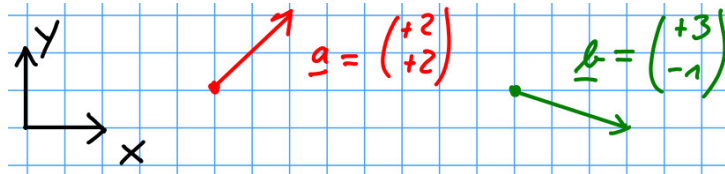
2 Kinematik von Massenpunkten

- Wiki: “Die **Kinematik** ist die Lehre der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum ... ohne die Ursache der Bewegung (Kräfte) zu kennen.”
- Kinematik bildet Vorstufe der **Dynamik**, die die Kräfte mit einbezieht.
- Anstelle von ausgedehnten Objekten (Stein, Planet) betrachten wir häufig **Massenpunkte**:
 - Ausdehnung 0.
 - Approximation, die Rechnungen erheblich vereinfacht.
 - Approximation mag gut sein, wenn ausgedehntes Objekt nicht rotiert/seine Bewegung nicht von Rotation beeinflusst wird/etc. Güte der Approximation muss von Fall zu Fall diskutiert werden.
(Ohne diese Approximation: Betrachte **Starre Körper** [“ausgedehnte feste Objekte”] statt Massenpunkte.)
- Position eines Massenpunkts durch x -, y - und z -Koordinate beschrieben, Zusammenfassung zu Vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (Einheit von $x, y, z, \mathbf{r}$: Länge, z.B. m).
- Sich bewegendes Massenpunkt: x, y und z sind zeitabhängig, also Funktionen der Zeit t , d.h. $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ bzw. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (wird als **Trajektorie** bezeichnet).
- Annahmen:
 - Absolute Zeit, d.h. Zeit vergeht für alle Beobachter gleich schnell.
(Nicht mehr erfüllt in spezieller Relativitätstheorie, z.B. für sich bewegendes Beobachter vergeht die Zeit langsamer.)
 - Flacher Raum, kann mit kartesischen Koordinaten beschrieben werden, Abstände können mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden.
(Nicht mehr erfüllt in allgemeiner Relativitätstheorie, z.B. Winkelsumme im Dreieck $\neq 180^\circ$.)

2.1 Grundlagen der Vektorrechnung

- Klassifikation physikalischer Größen:
 - **Skalare**: Eine Zahl (evtl. mit Einheit), z.B. Masse m , Temperatur T .
 - **Vektoren**: Im d -dimensionalen Raum Satz von d zusammengehörigen Größen (evtl. mit Einheit), besitzt eine Richtung (“Pfeil”), z.B. Position eines Massenpunkts $\mathbf{r}$, seine Geschwindigkeit $\mathbf{v}$.
 - **Tensoren**: Ein Satz von Größen, der mehrere Richtungen besitzt (kompliziert, daher erst später), z.B. Trägheitstensor (die Verallgemeinerung des Trägheitsmoments) oder Feldstärketensor (vereinheitlichte Beschreibung des elektrischen und magnetischen Felds).

- In Newtonscher Mechanik häufig 2- oder 3-dimensionale räumliche Vektoren, in spezieller Relativitätstheorie 4-dimensionale Raumzeitvektoren.
- Anschauliche Beschreibung eines Vektors: Pfeil.

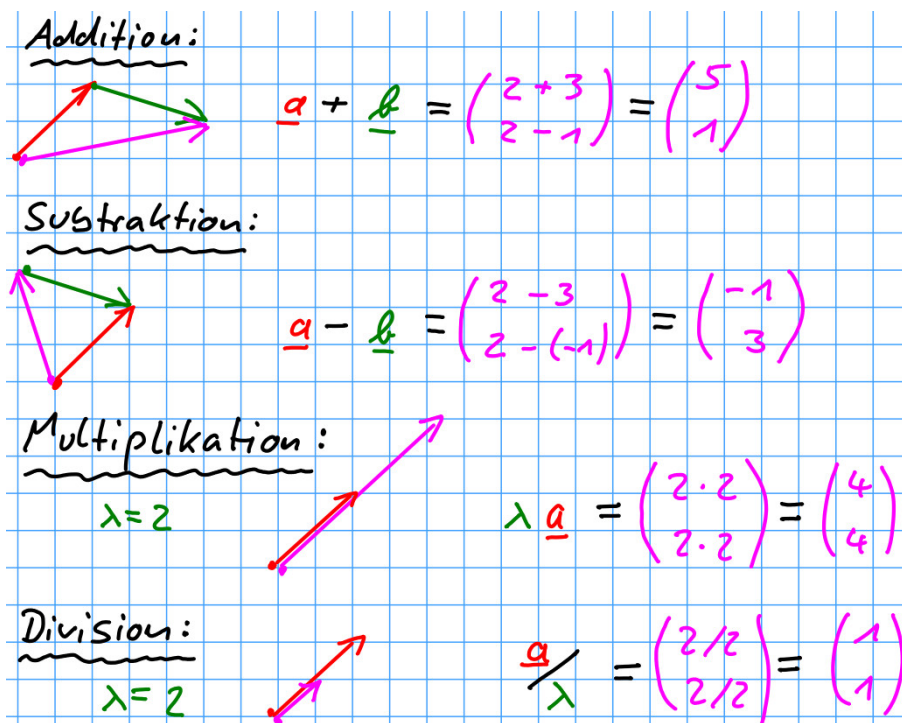


- Notation: in Form seiner **Komponenten**, streng genommen als Spalte von Größen, z.B. in 3 Dimensionen

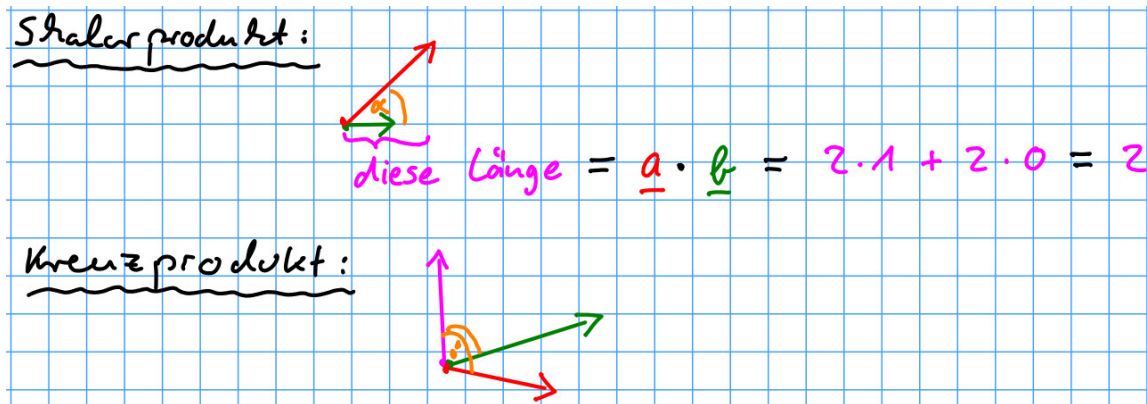
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

im Folgenden aber auch häufig als Zeile, d.h. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ist äquivalent.

- Grundlegende Rechenoperationen mit Vektoren und geometrische Bedeutung:
 - **Addition:** (zwei Vektoren)
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
 Entspricht Aneinandersetzen von Pfeilen (Pfeilende von $\mathbf{b}$ an Pfeilspitze von $\mathbf{a}$).



- **Subtraktion:** (zwei Vektoren)
 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.
 Entspricht Aneinandersetzen von Pfeilen (Pfeilspitze von $\mathbf{b}$ an Pfeilspitze von $\mathbf{a}$).
 * Negativer Vektor $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ ist umgekehrter Pfeil.
- **Multiplikation:** (Vektor und Zahl)
 $\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.
 Länge des Pfeils wird um Faktor λ verändert.
- **Division:** (Vektor und Zahl)
 $\mathbf{a}/\lambda = (a_1/\lambda, a_2/\lambda, a_3/\lambda)$.
 Länge des Pfeils wird um Faktor $1/\lambda$ verändert.
- **Multiplikation (Skalarprodukt):** (zwei Vektoren)
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
 Hat der Vektor $\mathbf{b}$ Länge 1, entspricht $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ senkrechter Projektion von $\mathbf{a}$ auf $\mathbf{b}$.



- * Beispiel zur Illustration:
 $\mathbf{a} = a(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ (a ist die Länge von $\mathbf{a}$), $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$
 $\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cos(\alpha)$.
- * Allgemein
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\alpha)$. (2)
- * Folglich kann man den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen,
 $\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}\right)$, (3)
 oder die Länge eines Vektors,
 $a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$ (4)
 (häufig auch Notation $|\mathbf{a}| = a$, **Betragsstriche** bzw. “**Betrag von a**”; nach letztem Gleichheitszeichen “Pythagoras”).

***** 16. Oktober 2026 (2. Vorlesung) *****

- **Multiplikation (Kreuz- bzw. Vektorprodukt):** (zwei Vektoren)
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$.
Tipp: Eine Komponente zu merken, reicht aus ... Rest über zyklische Vertauschung, (123) $\rightarrow$ (231) $\rightarrow$ (312) (häufig in theoretischer Physik).
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sowohl **orthogonal** (= senkrecht) zu $\mathbf{a}$ als auch zu $\mathbf{b}$.

* Beispiel zur Illustration:

Erneut $\mathbf{a} = a(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$

$\rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, -a \sin(\alpha))$.

* Es gilt

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\alpha), \quad (5)$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ entspricht also der Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

* Man kann den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen,

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{ab}\right). \quad (6)$$

* $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \vec{0}$ (häufig schreibt man 0 statt $\vec{0}$).

* Ausrichtung von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ über Rechte-Hand-Regel: Daumen = $\mathbf{a}$, Zeigefinger = $\mathbf{b}$, Mittelfinger = $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (Voraussetzung: **Rechtshändiges Koordinatensystem**, d.h. Daumen = x -Achse, Zeigefinger = y -Achse, Mittelfinger = z -Achse).

* Vorsicht:

· Skalare ("normale Zahlen"):

$a(b + c) = ab + ac$ (Distributivgesetz)

$ab = ba$ (Kommutativgesetz)

$a(bc) = (ab)c$ (Assoziativgesetz).

· Kreuzprodukt:

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (Distributivgesetz erfüllt)

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (Kommutativgesetz nicht erfüllt)

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ (Assoziativgesetz nicht erfüllt).

– **Division:** (Vektor und Vektor)

Unsinn! Gibt es nicht! Niemals machen!

• Einheitsvektoren:

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$,

$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$,

$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$.

Damit $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$. Ausdrücken eines Vektors durch Einheitsvektoren (bzw. allgemeiner **orthonormale Basisvektoren** = Satz von senkrechten Vektoren der Länge 1) und den Komponenten bezüglich dieser Vektoren häufig zweckmäßig (Anwendungen später).

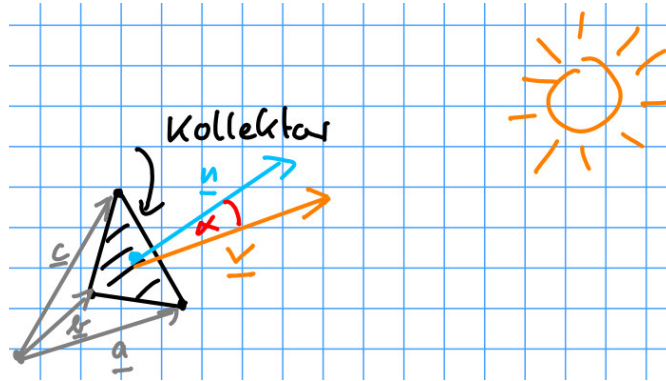
• Fast alle bisherigen Aussagen gelten in beliebiger Anzahl von Dimensionen d , z.B. Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n a_jb_j. \quad (7)$$

Ausnahme ist Kreuzprodukt, existiert nur in $d = 3$ Dimensionen.

Beispielaufgabe

Ein Dreieck (z.B. ein kleines Flächenstück eines Sonnenkollektors) ist durch seine Eckpunkte $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ definiert. Die Sonne steht in Richtung $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ hat Länge 1) am Himmel. Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf das Dreieck?



- **Normale** des Dreiecks (= senkrecht auf dem Dreieck stehender Vektor der Länge 1):

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \quad \mathbf{u} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}). \quad (8)$$

- Winkel der Sonneneinstrahlung:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|}\right) = \arccos(|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|) \quad (9)$$

(die Betragstriche bei $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|$ sorgen für einen Winkel zwischen $0 \dots 90^\circ$).

***** 19. Oktober 2026 (3. Vorlesung) *****

2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

2.2.1 Geschwindigkeit

- 1-dimensionale Bewegung, $x(t)$:
 - Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$:

$$v_{\text{av}}(t, t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (10)$$

(v von *velocity*; Einheit von v : Länge/Zeit, z.B. m/s).

- Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ergibt sich im Grenzfalle $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{av}(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) \quad (11)$$

($\dot{x}$ ist abkürzende Schreibweise für “Zeitableitung von x ”; zur Erinnerung: Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist $f'(x) = (d/dx)f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x$).

- Negatives Vorzeichen von $v(t)$ möglich, entspricht Bewegung in negative x -Richtung.

- 3-dimensionale Bewegung, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$:

- Analog:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)). \quad (12)$$

- Ableitung einer vektorwertigen Funktion durch Ableiten ihrer Komponenten.
- Die Geschwindigkeit in 3 Dimensionen ist ein 3-dimensionaler Vektor:

- * Betrag der Geschwindigkeit:

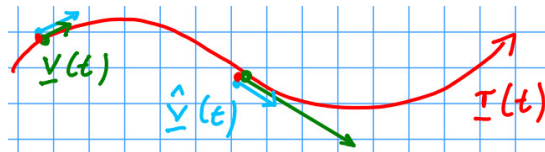
$$\begin{aligned} v(t) &= |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2 + (v_z(t))^2} = \\ &= \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

- * Richtung der Geschwindigkeit:

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \quad (14)$$

(eine Richtung hat Länge 1; man spricht auch von einem normierten Vektor, bezeichnet durch $\hat{\cdot}$, allgemein $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$).

- * Geschwindigkeit bzw. Richtung der Geschwindigkeit ist Tangente an Trajektorie.



2.2.2 Beschleunigung

- Geschwindigkeit ist Veränderung des Ortes pro Zeit.
- Beschleunigung a bzw. $\mathbf{a}$ ist Veränderung der Geschwindigkeit pro Zeit (a von *acceleration*).
- Damit Gleichungen aus Abschnitt 2.2.1 nach Ersetzung $x \rightarrow v$ und $v \rightarrow a$ bzw. $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$ und $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{a}$ ebenfalls gültig, z.B.

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) \quad (15)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (16)$$

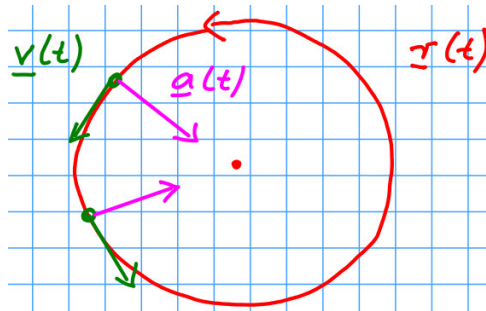
($\ddot{x}$ ist abkürzende Schreibweise für “doppelte Zeitableitung von x ”; Einheit von a : Länge/Zeit², z.B. m/s²).

2.2.3 Beispiel: Kreisbewegung

- Trajektorie einer Kreisbewegung (Radius R) mit konstanter Geschwindigkeit (genauer $|\mathbf{v}| = \text{const}$):

$$\mathbf{r}(t) = R(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))) \quad , \quad \varphi(t) = \omega t \quad (17)$$

$$\rightarrow \mathbf{r}(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t)). \quad (18)$$



- ω ist die (hier konstante) Winkelgeschwindigkeit (Einheit: 1/Zeit, z.B. 1/s):

- Beziehung zum Betrag der Geschwindigkeit v :

Kreisumfang $2\pi R$,

Zeitdauer eines Umlaufs $2\pi/\omega$

... also $v = 2\pi R / (2\pi/\omega) = R\omega$.

- Analog zu $v = \dot{x}$ gilt $\omega = \dot{\varphi}$.

- Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), +\cos(\omega t)) \quad (19)$$

(ω aufgrund der Kettenregel: $(d/dt)f(g(t)) = f'(g(t))\dot{g}(t)$; hier: $f(g) = R\cos(g)$ bzw. $f(g) = R\sin(g)$, $g(t) = \omega t$).

- $(-\sin(\omega t), +\cos(\omega t))$ hat Länge 1 (wegen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$), ist also normiert.

→ Betrag der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}(t)| = R\omega$ (konsistent mit obigen Überlegungen).

→ Richtung der Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}(t) = (-\sin(\omega t), +\cos(\omega t))$, Tangente an kreisförmige Trajektorie.

- Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = R\omega^2(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)). \quad (20)$$

- $(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$ hat Länge 1, ist also normiert.

→ Betrag der Beschleunigung $|\mathbf{a}(t)| = R\omega^2$.

→ Richtung der Beschleunigung $\hat{\mathbf{a}}(t) = (-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$, nach innen gerichtet (Zentripetalbeschleunigung, spürbar in Form nach außen gerichteter Zentrifugalkraft).

- Obwohl der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist, ist die Beschleunigung von 0 verschieden, da sich die Richtung der Beschleunigung ständig verändert.

3 Dynamik von Massenpunkten (Grundlagen)

- Ziel: Berechne bei gegebener Kraft auf einen Massenpunkt (z.B. Schwerfeld der Erde, vorgegebene Kraft erzeugt durch einen Raketenantrieb) die resultierende Trajektorie dieses Massenpunkts.

3.1 Newtonsche Axiome

- **1. Axiom (Trägheitsprinzip):**

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

- Scheint im ersten Moment unserer Alltagserfahrung zu widersprechen ($\rightarrow$ Reibungskräfte).
- Sollte eigentlich strenger formuliert werden:
Es gibt Koordinatensysteme, in denen ein Körper ...
- Solche Koordinatensysteme nennt man **Inertialsysteme** (Koordinatensysteme, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen bzw. sich relativ dazu mit konstanter Geschwindigkeit bewegen; keine Intertialsysteme sind z.B. Koordinatensysteme innerhalb eines beschleunigenden Fahrzeugs oder auf einem Karusell).

- **2. Axiom (Aktionsprinzip):**

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

$$\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (21)$$

(**Newtonsche Bewegungsgleichung (BGl)**).

- Zeitabhängigkeit von $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, ... hier und im Folgenden meist weggelassen.
- m ist **träge Masse** (quantifiziert, wie stark ein Massenpunkt bei gegebener Kraft beschleunigt wird; hat zunächst nichts mit **schwerer Masse** zu tun, die im Gravitationsgesetz auftritt; Experiment: $m_t = m_s$ mit großer Genauigkeit, daher meist keine Unterscheidung, d.h. $m = m_t = m_s$).
- Kraft $\mathbf{F}$ (Einheit: Masse $\times$ Länge/Zeit², z.B. kg m/s²) kann vom Ort $\mathbf{r}$ abhängen (z.B. Gravitationsfeld), von der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ (z.B. Luftwiderstand) und von der Zeit t (z.B. sich veränderndes elektrisches Feld).
- $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}$ ist der **Impuls** (Einheit: Masse $\times$ Länge/Zeit, z.B. kg m/s).
- (21) ist eine **Differentialgleichung (DGl)** (genauer eine **gewöhnliche Differentialgleichung**), d.h. eine Gleichung in der eine Funktion (hier $\mathbf{r}$) in einer Variable (hier t) und deren Ableitungen (hier $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$) auftreten; ein Großteil der theoretischen Physik besteht aus dem Lösen von DGLs (hier dem Finden einer speziellen Trajektorie oder aller möglichen Trajektorien $\mathbf{r}$ bei gegebener Kraft $\mathbf{F}$).

- **3. Axiom (Wechselwirkungsprinzip):**

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper 1 auf einen anderen Körper 2 eine

Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper 2 auf Körper 1 (reactio).

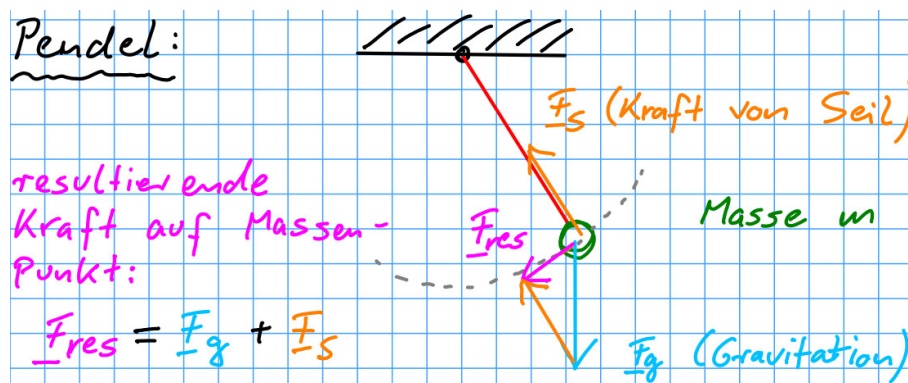
$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}. \quad (22)$$

- **4. Axiom (Superpositionsprinzip):**

Wirken auf einen Punkt (oder einen starren Körper) mehrere Kräfte, so addieren sich diese vektoriell zu einer resultierenden Kraft auf.

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = \sum_j \mathbf{F}_j. \quad (23)$$

- Zeichnen aller auftretenden Kräfte ist häufig zum Verständnis eines physikalischen Problems hilfreich.



***** 23. November 2026 (4. Vorlesung) *****

3.2 Typische in der Mechanik auftretende Kräfte

- **Gravitationskraft:**

Ein Massenpunkt 1 ([schwere] Masse m_1) übt auf einen Massenpunkt 2 ([schwere] Masse m_2) die Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2} \quad (24)$$

aus¹.

- $G = 6.674 \dots \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$, **Gravitationskonstante**.
- $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, Abstand der beiden Massenpunkte.
- $\hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, Richtung der Kraft, von 1 nach 2.
- Stärke der Gravitationskraft nimmt quadratisch mit Abstand ab.

¹Diskussion träge vs. schwere Masse, siehe Abschnitt 3.1.

– $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ (3. Newtonsches Axiom).

- **Erdanziehung:**

Bei Bewegung eines Massenpunkts (Masse m) in vergleichsweise kleinem Gebiet Näherung der Gravitationskraft (24) gemäß

$$\mathbf{F}_g = -m g \mathbf{e}_z. \quad (25)$$

- Kleines Gebiet: Relative (d.h. prozentuale) Veränderung von r_{12} und $\hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}$ klein.
- z -Achse zeigt nach oben.
- Beziehung zwischen G und g (Ortsfaktor): $g = GM/R^2$, wobei M die Erdmasse und R der Erdradius ist ($M \approx 5.97 \times 10^{24}$ kg, $R \approx 6.37 \times 10^6$ m; damit $g \approx 10 \text{ m/s}^2$).
Bemerkung: Man müsste und kann zeigen, dass die über den gesamten Erdball verteilte Masse über der Erdoberfläche die gleiche Kraft erzeugt wie ein am Erdmittelpunkt sitzender Massenpunkt, dessen Masse der Erdmasse entspricht (siehe Abschnitt ??).

- **Harmonische Kraft:**

Kraft proportional zur Auslenkung aus einer Ruhelage $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (26)$$

- Realisierbar z.B. mit Feder (festgemacht bei $\mathbf{r}_0$, Ruhelänge 0), gültig für kleine Auslenkungen.
- Massenpunkte, die unter Einfluss einer harmonischen Kraft (26) schwingen, werden als **harmonische Oszillatoren** bezeichnet.
- Sehr allgemein anwendbar: Systeme von Massenpunkten in der Nähe von Gleichgewichtslagen schwingen harmonisch (mehr dazu z.B. in der Vorlesung “Theoretische Physik 2 – Klassische Mechanik” im Sommersemester); tritt häufig auf, sehr wichtig.

- **Reibungskräfte:**

- $\mathbf{F} = -\alpha \hat{\mathbf{v}}$ (konstant); z.B. Gleit- und Rollreibung.
- $\mathbf{F} = -\beta v \hat{\mathbf{v}}$ (linear, Newton); z.B. langsame Bewegung in Flüssigkeiten.
- $\mathbf{F} = -\gamma v^2 \hat{\mathbf{v}}$ (quadratisch, Stokes); z.B. schnelle Bewegung in Luft.
- Stets der Geschwindigkeit entgegen gerichtet.
- In Natur meist viel komplizierter; obige Formeln dienen grober Modellierung von Reibung für ein vorliegendes System.

3.3 Lösung der Newtonschen BGl für spezielle “einfache Kräfte” (1)

- Lösen von DGLs (z.B. Newtonsche BGl (21)) i.A. sehr schwierig.
- Analytisch nur für spezielle “einfache Kräfte” möglich.
- Ansonsten Einsatz von Computern für numerische Lösung erforderlich.

- Numerik/Computereinsatz ist wichtiger Teil moderner Physik.
Tipp: Möglichst bald mit Computer vertraut machen (Datenanalyse, Plotten von Funktionen, Programmieren, Computeralgebrasysteme, etc.).
- Analytische Lösung ist numerischer Lösung immer überlegen, daher, wenn möglich, BGl analytisch lösen.
- Oft Kombination erforderlich, z.B. analytische Vorbereitungen damit Numerik funktioniert.

3.3.1 Verschwindende Kraft $F = 0$

- Beispiel: Bewegung fernab von Gravitationsquellen im Weltraum.
- Freie Newtonsche BGl (d.h. $F = 0$) in 1 Dimension:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} = 0. \tag{27}$$

- **Methode 1 (durch “scharfes Hinschauen und Überlegen”):**

- Welche Funktion $x(t)$ ist zweifach abgeleitet 0?
- Konstante, $x(t) = A$.
- Linearer Term, $x(t) = Bt$.
- Allgemeine Lösung: $x(t) = Bt + A$.
- Bedeutung von A :
 $x(t = 0) = A$, also ist A die Position des Massenpunkts bei $t = 0$... verwende zur besseren Lesbarkeit Notation $A \rightarrow x_0$.
- Bedeutung von B :
 $\dot{x} = B$, also ist B die Geschwindigkeit des Massenpunkts bei $t = 0$ (und auch zu jedem anderen Zeitpunkt) ... verwende zur besseren Lesbarkeit Notation $B \rightarrow v_0$.
- Damit $x(t) = v_0 t + x_0$.
- x_0, v_0 sind frei wählbare Konstanten.
 - * Parametrisieren mögliche Lösungen der freien Newtonschen BGl (hat nicht nur eine Lösung, sondern unendlich viele, alle möglichen Trajektorien bei verschwindender Kraft, d.h. geradlinige Bewegungen mit beliebigem Startpunkt und beliebiger Geschwindigkeit).
 - * Müssen so gewählt werden, dass **Anfangsbedingungen** (ABs) erfüllt sind, z.B. Vorgabe von Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$, $x(t = 0) = x_0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0$.
- Allgemein: Vollständige Lösung einer **gewöhnlichen DGl n -ter Ordnung** (Funktion und deren 1-te bis n -te Ableitung treten auf) beinhaltet n unbestimmte Konstanten.
- ABs der Newtonschen BGl müssen nicht notwendig Ort und Geschwindigkeit bei $t = 0$ sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispielaufgabe

Berechne die Trajektorie eines sich frei bewegenden Massenpunkts, der sich zur Zeit t_1 bei x_1 und zur Zeit t_2 bei x_2 befindet.

- Starte mit allgemeiner Lösung $x(t) = Bt + A$.
- Stelle Gleichungssystem zur Bestimmung von A und B auf:
 - (1): $x(t_1) = Bt_1 + A = x_1$
 - (2): $x(t_2) = Bt_2 + A = x_2$.
- Löse Gleichungssystem:
 - (2) - (1): $B(t_2 - t_1) = x_2 - x_1 \rightarrow B = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$.
 - (1): $A = x_1 - Bt_1 = x_1 - ((x_2 - x_1)/(t_2 - t_1))t_1$.
- Endergebnis:

$$x(t) = \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}_{=v}(t - t_1) + x_1. \quad (28)$$

- **Methode 2 (“unbestimmte Integration”):**

- Integriere BGl 2-mal ohne Verwendung von Integrationsgrenzen (unbestimmte Integrale):

$$\int dt \ddot{x} = \int dt 0 \rightarrow \dot{x} = B \quad (29)$$

$$\int dt \dot{x} = \int dt B \rightarrow x = Bt + A. \quad (30)$$

- ABs wie bei Methode 1 (Gleichungssystem aufstellen und lösen).

- **Methode 3 (“bestimmte Integration”):**

- Integriere BGl 2-mal mit Verwendung von Integrationsgrenzen (bestimmte Integrale), z.B. von festem Startzeitpunkt 0 zu “aktuellem Zeitpunkt” t :

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \ddot{x}(t') &= \int_0^t dt' 0 \rightarrow \dot{x}(t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} = C \Big|_{t'=0}^{t'=t} \\ \rightarrow \dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(t=0)}_{=v_0} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\int_0^t dt' (\dot{x}(t') - v_0) = \int_0^t dt' 0 \quad (32)$$

$$\rightarrow \left(x(t') - v_0 t' \right) \Big|_{t'=0}^{t'=t} = C \Big|_{t'=0}^{t'=t} \rightarrow x(t) - v_0 t - \underbrace{x(t=0)}_{=x_0} = 0, \quad (33)$$

also $x(t) = v_0 t + x_0$ (beachte, dass Integrationsvariable in t' umbenannt wurde, darf nicht t lauten, da t bereits als Integrationsgrenze verwendet wird).

- ABs $x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = v_0$ automatisch erfüllt.
- Alle drei Methoden äquivalent, Geschmacksfrage bzw. manchmal eine Methode zweckmäßiger als eine andere.
- Freie Newtonsche BGl (d.h. $\mathbf{F} = 0$) in 3 Dimensionen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{r}} = 0. \tag{34}$$

- Entspricht drei unabhängigen DGls, $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = 0, \ddot{z} = 0$.
- Lösung jeder der drei Gleichungen wie im 1-dimensionalen Fall, d.h.

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0,x}t + x_0 \\ y(t) &= v_{0,y}t + y_0 \\ z(t) &= v_{0,z}t + z_0, \end{aligned}$$
 insgesamt $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0$.
- Für eindeutige Trajektorie 6 ABs notwendig, z.B. $\mathbf{r}(t=0), \dot{\mathbf{r}}(t=0)$.