Theoretische Physik 1 - Mathematische Methoden

Wintersemester 2021/2022 – Prof. Marc Wagner

Martin Pflaumer: pflaumer@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 8

vom 10.12.21, Abgabe am 17.12.21, Besprechung in der Woche vom 10.01.22

Aufgabe 1 [*Vektoranalysis*] (2+2+2=6 Pkt.)

(a) Betrachte sogenannte Polarkoordinaten

$$\boldsymbol{r}(R,\varphi) = (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi)) \ .$$

Bestimme die Vektoren, welche als

$$\boldsymbol{e}_\xi = |\partial\boldsymbol{r}/\partial\xi|^{-1} \, \partial\boldsymbol{r}/\partial\xi \ , \text{ mit } \xi \in \{R,\varphi\}$$

definiert sind (und als Basisvektoren der Polarkoordinaten bezeichnet werden). Drücke dann das Differential $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ in $dR, d\varphi, \boldsymbol{e}_R$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ aus. Skizziere und interpretiere deine Ergebnisse.

Bestimme anschließend die Richtungsableitungen von

$$R(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

nach $\boldsymbol{e}_R$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ und erkläre die Ergebnisse geometrisch.

(b) Betrachte ein Gebirge, welches durch

$$h(x,y) = \exp\Big(-\sqrt{(x-2.5)^2+(y+3)^2}\Big) - 0.2\sqrt{(x+1.5)^2+(y-2)^2}$$

beschrieben wird. Bestimme den Gradienten von h und die Maxima, d.h. die Bergspitzen.

(c) Gegeben sei ein Hügel, welcher durch

$$h(x,y) = \exp\big(-(x^2+y^2)/2\big)$$

beschrieben werde. Bestimme die Punkte, an denen der Anstieg am steilsten ist.

Aufgabe 2 [*Potentiale*] (1+1+1=3 Pkt.)

Betrachte die folgenden Potentiale

(a) $V(x) = \frac{A}{2}x^2$ (Potential des harmonischen Oszillators)

(b) $V(x) = -\frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{4}x^4$ (das sogenannte "Mexican Hat"-Potential)

(c) $V(x) = -\frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{3}x^3 + \frac{C}{4}x^4$.

Hierbei seien die Konstanten A, B, C jeweils positiv. Skizziere die Potentiale und diskutiere stabile und instabile Gleichgewichtslagen sowie Umkehrpunkte, jeweils in Abhängigkeit von der Energie E.

Aufgabe 3 [*Arbeit*] (2+4=6 Pkt.)

(a) Berechne im Folgenden jeweils die Arbeit, die bei einer Bewegung von x_1 nach x_2 gegen die Kraft F verrichtet wird.

(i) $F(x) = -mg$ (Schwerefeld der Erde)

(ii) $F(x) = -\omega_0^2 m x^2$ (harmonischer Oszillator)

(b) Du fährst mit einem Auto zur Zeit 0 von $x_1(0) = 0$ nach x_2, wo Du zur Zeit T ankommst. Hierbei wirke die Reibungskraft $F = -\alpha \dot{x}^2$ auf das Auto. Welche Arbeit muss aufgrund der Reibungskraft verrichtet werden, wenn sich das Auto gemäß

(i) $x(t) = v_0 t$

(ii) $x(t) = \frac{1}{2}at^2$

bewegen soll? Gib das Ergebnis jeweils in Abhängigkeit von x_2 und T an. Wie ändert sich jeweils die zu verrichtende Arbeit, wenn der Zielpunkt in der halben bzw. der doppelten Zeit erreicht werden soll? Auf welcher dieser beiden Bahnkurven wird weniger Arbeit verrichtet?

Aufgabe 4 [*Zentralkraftfeld*] (3+2=5 Pkt.)

Eine Zentralkraft ist eine Kraft, die immer parallel oder antiparallel zum Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ ist und deren Betrag nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, d.h.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r,$$

wobei $\boldsymbol{e}_r$ der Einheitsvektor in $\boldsymbol{r}$-Richtung ist und der Abstand als $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ definiert ist.

(a) Zeige, dass die Divergenz einer Zentralkraft gegeben ist durch

$$\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 2\frac{f(r)}{r} + \frac{df(r)}{dr}.$$

(b) Zeige, dass für $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ die Rotation eines Zentralkraftfeldes verschwindet:

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}.$$