Organisation Übungen: **Dr. Christopher Pinke** **Raum 2.105** **pinke@th.physik.uni-frankfurt.de**

Blatt 8

vom 04.12.2015, Abgabe am 11.12.2015 in der Vorlesung

29) Maxwell-Gleichungen (schriftlich) *(3+1+2=6 Punkte)*

Elektrische Felder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ und magnetische Felder $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ werden durch die sogenannten Maxwell-Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}
\text{div } \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{\rho(\boldsymbol{r}, t)}{\epsilon_0} , \\
\text{div } \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= 0 , \\
\text{rot } \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial_t} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) , \\
\text{rot } \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial_t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) .
\end{aligned}$$

Hierbei sind ϵ_0 und μ_0 Konstanten und $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ die elektrische Ladungsverteilung. Diese Gleichungen können kompakter geschrieben werden indem man eine skalare Funktion $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ und eine vektorwertige Funktion $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ einführt. Mit diesen lassen sich dann $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ gemäß

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= -\text{grad } \phi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial}{\partial_t} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) , \\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= \text{rot } \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)
\end{aligned}$$

schreiben. Eine detaillierte Behandlung der Maxwell-Gleichungen erfolgt in der Vorlesung Theoretische Physik 3. An dieser Stelle ist lediglich die mathematische Struktur von Interesse.

(a) Drücken Sie die Maxwell-Gleichungen durch $\boldsymbol{A}$ und ϕ anstelle von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich.

(b) Berechnen Sie $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ für den Fall $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$ und $\phi = 0$. B sei eine Konstante. Überprüfen Sie, dass die Maxwell-Gleichungen erfüllt sind falls keine elektrischen Ladungen vorliegen ($\rho = 0$).

(c) Berechnen Sie $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ für den Fall $\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$ und $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$. Skizzieren Sie $\boldsymbol{E}$. Welche Erwartungen ergeben sich hieraus für dessen Divergenz, insbesondere in der Gegend um den Ursprung? Vergleichen und kommentieren Sie ihre Erwartungen mit dem analytischen Ergebnis.

30) Volumen- und Wegintegrale (schriftlich) *(1+2+3=6 Punkte)*

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^a dx \int_0^b dy$ und interpretieren Sie das Ergebnis als Flächeninhalt. Berechnen Sie anschließend das Integral $\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi$. Erhalten Sie dadurch die Fläche eines Kreises mit Radius R? Wie muss der zweite Integrand verändert werden, damit man die Kreisfläche erhält? Diskutieren Sie geometrisch das zugrundeliegende Problem. a, b und R seien Konstanten.

(b) Eine Masse bewege sich auf einer Spiralbahn gemäß $\boldsymbol{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), bt)$, die Bewegung ist also durch die Zeit t parametrisiert (siehe auch Aufgabe 5). R, ω und b seien konstant. Berechnen Sie für den Fall $b = 0$ den in der Zeit von 0 bis T zurückgelegten Weg s, indem Sie ein entsprechende Wegintegral aufstellen und lösen. Wie ändert sich das Ergebnis wenn b ungleich Null ist?

(c) In den Aufgaben 8 und 9 wurde der schiefe Wurf behandelt, dessen Trajektorie

$$\boldsymbol{r}(t) = (v_0 t\cos(\alpha), v_0 t\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2, 0)$$

ist. Bestimmen Sie hierfür, analog zu b), die von dem geworfenen Gegenstand zurückgelegte Strecke s. Die Zeit, bei der die Masse wieder am Boden ankommt ist $T = \frac{2v_0\sin(\alpha)}{g}$. Wie viel größer ist s für den weitmöglichsten Wurf ($\alpha = 45°$) im Vergleich zur in x-Richtung zurückgelegten Strecke?

Hinweis: Benutzen Sie $\int_a^b \sqrt{x^2 + A}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A} + A\ln(\sqrt{x^2+A} + x))|_a^b$, *mit A konstant und positiv.*

31) Richtungsableitung (mündlich) *(2 Punkte)*

Betrachten Sie eine Funktion $f(x, y)$. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung von f maximal wird wenn die Richtung $\hat{\boldsymbol{n}}$ parallel zum Gradienten, minimal wenn $\hat{\boldsymbol{n}}$ antiparallel zum Gradienten und Null wenn $\hat{\boldsymbol{n}}$ senkrecht zum Gradienten steht. Welche Werte nimmt die Richtungsableitung jeweils an? *Hinweis: Parametrisieren Sie $\hat{\boldsymbol{n}}$ als* $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ *und bestimmen Sie die Extrema der Richtungsableitung bzgl. des Winkels φ.*

32) Vektoranalysis II (mündlich) *(1+1+1+1+1+1=6 Punkte)*

Gegeben seien eine skalare Funktion $\phi(\boldsymbol{r})$, ein Vektorfeld $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ sowie Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$. Beweisen Sie die folgenden Relationen. Benutzen Sie hierbei ggf. den Levi-Civita-Tensor (ϵ-Tensor) sowie die auf Blatt 1 gezeigten Identitäten.

(a) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

(b) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = a^2 b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$

(c) $\text{div}\,(\phi \boldsymbol{A}) = \phi\, \text{div}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \cdot (\text{grad}\,\phi)$

(d) $\text{rot}\,(\phi \boldsymbol{A}) = \phi\, \text{rot}(\boldsymbol{A}) + (\text{grad}\,\phi) \times \boldsymbol{A}$

(e) Was ergibt der Ausdruck rot $(\frac{1}{2}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, wobei $\boldsymbol{a}$ konstant sei ($\boldsymbol{r}$ sei der Ortsvektor)?

(f) Zeigen Sie das rot $(\phi(r)\boldsymbol{r}) = 0$ gilt falls ϕ nur vom Betrag r des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ abhängt.