Organisation Übungen: Dr. Christopher Pinke Raum 2.105 pinke@th.physik.uni-frankfurt.de

Blatt 6

vom 20.11.2015, Abgabe am 27.11.2015 in der Vorlesung

21) Gedämpfter harmonischer Oszillator (schriftlich) *(3+2=5 Punkte)*

Betrachten Sie einen gedämpften harmonischen Oszillator mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ,$$

wie er in der Vorlesung behandelt wurde.

(a) Geben Sie die Trajektorie für die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = x_0, \dot{x}(t = 0) = v_0$ an. Unterscheiden Sie dabei die drei Fälle:

(i) $\alpha > \omega_0$

(ii) $\alpha < \omega_0$

(iii) $\alpha = \omega_0$.

(b) Wieviele Nulldurchgänge sind in den Fällen (i) und (iii) möglich? Wie hängen diese von den Anfangsbedingungen x_0, v_0 ab?

22) Gedämpfter harmonischer Oszillator II (schriftlich) *(4+2=6 Punkte)*

Gegeben sei ein gedämpfter harmonischer Oszillator unter dem Einfluß einer äußeren Kraft mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = F/m \ .$$

(a) Die äußere anregende Kraft sei $F = f_0 m \cos(\Omega_0 t)$. Berechnen Sie die Trajektorie für den Fall, dass der Harmonische Oszillator zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $x = 0$ in Ruhe sei. Gehen Sie dabei von schwacher Dämpfung $\alpha < \omega_0$ aus. Zeichnen Sie die resultierende Trajektorie (idealerweise mit dem Computer) für die Parameter $\alpha = \sqrt{2/3}, \omega_0 = 1, f_0 = 1/\sqrt{3}, \Omega_0 = \sqrt{3}$. *Hinweis: Benutzen Sie ggf.* $\sin(\mathrm{arccot}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *und* $\cos(\mathrm{arccot}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Betrachten Sie nun den Fall $F = f_0 m \cos(\Omega_0 t) + f_1 m \cos(\Omega_1 t)$ mit denselben Anfangsbedingungen. Zeichnen Sie die resultierende Trajektorie für die Parameter $\alpha = \sqrt{2/3}, \omega_0 = 1, f_0 = f_1 = \sqrt{3}, \Omega_0 = \sqrt{3} = 2\Omega_1$.

23) Gedämpfter harmonischer Oszillator III (mündlich) *(4 Punkte)*

Betrachten Sie wieder einen gedämpften harmonischen Oszillator in einer Dimension mit der rücktreibenden Kraft $-2m\alpha\dot{x}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Oszillator in Ruhe bei $x = 0$. Im Zeitintervall $[0, T]$ wirke die konstante Kraft $F = f_0 m$. Für $t > T$ sei $F = 0$. Bestimmen Sie die Trajektorie für beide Zeitbereiche.

24) Trigonometrische Funktionen (mündlich) *(2+1+1+1=5 Punkte)*

(a) Zeigen sie, dass die drei Ansätze

$$x_1(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = C\sin(\omega_0 t + \phi_1) \quad \text{und} \quad x_3(t) = D\cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators vollständig lösen. Zeigen sie weiterhin explizit, dass die drei Ansätze äquivalent sind, d.h bestimmen Sie die Beziehungen zwischen $(A, B), (C, \phi_1)$ und (D, ϕ_2), die die Ansätze ineinander überführen.

(b) Zeigen Sie, dass die Parameter A, B und α in dem Ausdruck

$$A\cos(x) + B\sin(x + \alpha)$$

nicht unabhängig sind, indem Sie eine spezielle Veränderung eines Parameters durch entsprechende Veränderung der anderen beiden angeben.

(c) Zeigen Sie, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ linear unabhängige Funktionen sind, indem Sie z.B. die Gleichung

$$\cos(x) = A\sin(x)$$

für $x \in \{\pi/3, \pi/4\}$ aufstellen und zeigen, dass kein A existiert, so dass beide Gleichungen erfüllt sind.

(d) Zeigen Sie, dass $\cosh(x), \exp(x)$ und $\exp(-x)$ linear abhängig sind.