

Quantenfeldtheorie II

Marc Wagner

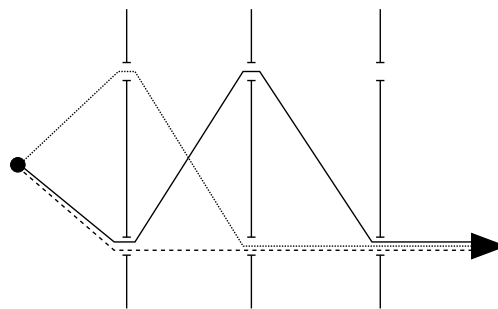
Goethe-Universität Frankfurt am Main – Sommersemester 2025

Version: 17. April 2025

Literatur: [1, 2, 3, 4, 5, 6].

1 Pfadintegrale in der QM

- Pfadintegrale: Formalismus zur Quantisierung, alternativ zur kanonischen Quantisierung (Kommutatorrelationen, Schrödinger-Gleichung, etc.).
- Häufig einfachere und systematischere Gestaltung von analytischen Rechnungen.
- Eignet sich (im Gegensatz zum kanonischen Formalismus) zur numerischen Umsetzung (→ Gitterfeldtheorie).
- Grundidee/physikalische Motivation: Doppelspaltexperiment.
 - Klassisches Teilchen geht entweder durch den einen oder den anderen Spalt.
 - QM Teilchen “geht gleichzeitig durch beide Spalte”.
 - Iterieren ...



◇ n Doppelspalte $\rightarrow 2^n$ Wege

◇ bei unendlich vielen “Unendlichspalten” nimmt ein Teilchen gleichzeitig alle denkbaren Pfade

- Am Ende resultiert der Pfadintegralformalismus: Ein QM Teilchen bewegt sich gleichzeitig auf allen denkbaren Trajektorien.
- Originalarbeit: [7] (R. P. Feynman, 1948).

1.1 Die Übergangsamplitude

- $|x\rangle$: Ortseigenzustand, zugehörige Wellenfunktion $\psi(x) \propto \delta(x)$, also Teilchen am Ort x .
- $\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle$, $t_2 > t_1$: Übergangsamplitude, beschreibt Überlapp zweier Zustände,
 - Ortseigenzustand $|x_1\rangle$ zum Zeitpunkt t_1 , der sich bis t in der Zeit entwickelt,
 - Ortseigenzustand $|x_2\rangle$ zum Zeitpunkt t_2 , der sich bis t in der Zeit entwickelt
 (Übergangsamplitude unabhängig von t).

- Zeitentwicklung von Zuständen folgt aus der Schrödinger-Gleichung,

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_j)}|\psi(t_j)\rangle \quad (1)$$

($\hbar = 1$, $c = 1$ hier und im Folgenden). Damit

$$\begin{aligned} \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle &= \langle (x_2, t_2)(t) | (x_1, t_1)(t) \rangle = \langle (x_2, t_2)(t_2) | e^{-iH(t_2-t_1)} | (x_1, t_1)(t_1) \rangle = \\ &= \langle x_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | x_1 \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

1.1.1 Übergangsamplitude, freies Teilchen

- Hamilton-Operator: $H = p^2/2m$.
- Übergangsamplitude:

$$\begin{aligned} \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle &= \langle x_2 | \exp\left(-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)\right) | x_1 \rangle = \\ &= \int dp \langle x_2 | p \rangle \exp\left(-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)\right) \langle p | x_1 \rangle = \\ &= \int dp \frac{e^{ip(x_2-x_1)}}{2\pi} \exp\left(-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp \exp\left(-i\left(\sqrt{\frac{t_2-t_1}{2m}}p - \sqrt{\frac{m}{2(t_2-t_1)}}(x_2-x_1)\right)^2\right) \\ &\quad \exp\left(+i\left(\sqrt{\frac{m}{2(t_2-t_1)}}(x_2-x_1)\right)^2\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(+i\frac{m(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right) \int dp \exp\left(-i\frac{t_2-t_1}{2m}p^2\right), \end{aligned} \quad (3)$$

wobei $\langle x | p \rangle = e^{ipx}/\sqrt{2\pi}$ verwendet wurde (Normierung $1/\sqrt{2\pi}$, damit $\langle k | p \rangle = \int dx \langle k | x \rangle \langle x | p \rangle = \delta(k-p)$).

- Gauß-Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a} \quad (\text{falls } \text{Re}(a) > 0) \quad (4)$$

(wird im Folgenden auch für $\text{Re}(a) = 0$ verwendet; siehe hierzu Abschnitt ??).

- Übergangsamplitude, Fortsetzung:

$$\dots = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_2-t_1)}} \exp\left(+i\frac{m(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right) \quad (5)$$

(scheint unsinnig, da $W_{x_1 \rightarrow x_2} = |\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle|^2$, die Wahrscheinlichkeit das zum Zeitpunkt t_1 bei x_1 präparierte Teilchen zum Zeitpunkt t_2 bei x_2 zu finden, unabhängig von x_1 und x_2 ist und außerdem $\int dx_2 W_{x_1 \rightarrow x_2} \neq 1$. Eine Diskussion dieser Probleme findet sich in Anhang A).

1.1.2 Übergangsamplitude, Teilchen in einem Potential

- Hamilton-Operator: $H = p^2/2m + V(x)$
- Im Allgemeinen keine geschlossene Lösung.
- Betrachte kleine Zeitdifferenzen $\epsilon = t_2 - t_1$:

$$e^{-iH\epsilon} = e^{-i(p^2/2m + V(x))\epsilon} = \underbrace{e^{-iV(x)\epsilon/2} \exp\left(-i\frac{p^2}{2m}\epsilon\right)}_{=U(\epsilon)} e^{-iV(x)\epsilon/2} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6)$$

wegen “Baker-Campbell-Hausdorff” $e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2+\dots}$ (... steht für dritte und höhere Potenzen von A und B). Es gilt

$$\begin{aligned} \langle x_2 | U(\epsilon) | x_1 \rangle &= e^{-iV(x_2)\epsilon/2} \langle x_2 | \exp\left(-i\frac{p^2}{2m}\epsilon\right) | x_1 \rangle e^{-iV(x_1)\epsilon/2} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}} \exp\left(+i\frac{m(x_2 - x_1)^2}{2\epsilon} - i\frac{(V(x_1) + V(x_2))\epsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

- Teile Zeitintervall $t_1 \dots t_2$ in N kleine Stücke:

$$\begin{aligned} - t_2 - t_1 &= N\epsilon. \\ - e^{-iH(t_2-t_1)} &= (e^{-iH\epsilon})^N = U(\epsilon)^N + \mathcal{O}(\epsilon^2). \\ - e^{-iH(t_2-t_1)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} U(\epsilon)^N. \end{aligned}$$

- Übergangsamplitude:

$$\begin{aligned} \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle &= \langle x_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | x_1 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x_2 | U(\epsilon)^N | x_1 \rangle = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dy_{N-1} \dots \int dy_2 \int dy_1 \langle x_2 | U(\epsilon) | y_{N-1} \rangle \dots \langle y_2 | U(\epsilon) | y_1 \rangle \langle y_1 | U(\epsilon) | x_1 \rangle = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{N/2} \int dy_{N-1} \dots \int dy_2 \int dy_1 \\ &\quad \exp\left(+i\frac{m}{2\epsilon}\left((x_2 - y_{N-1})^2 + \dots + (y_2 - y_1)^2 + (y_1 - x_1)^2\right)\right. \\ &\quad \left.- i\epsilon\left(V(x_2)/2 + V(y_{N-1}) + \dots + V(y_2) + V(y_1) + V(x_1)/2\right)\right). \end{aligned} \quad (8)$$

- Exponent:

$$i \sum_{j=1}^N \epsilon \left(\frac{m}{2} \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{\epsilon} \right)^2 - \frac{V(y_j) + V(y_{j-1})}{2} \right), \quad (9)$$

wobei $y_0 = x_1$ und $y_N = x_2$. Im betrachteten $\lim_{N \rightarrow \infty}$ entspricht dieser Ausdruck der klassischen Wirkung:

$$i \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{y}^2(t) - V(y(t)) \right) = iS[y], \quad (10)$$

wobei $y(t - t_1) = y_{(t-t_1)/\epsilon}$.

- Pfadintegral:

- Nach Definition

$$Dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{N/2} dy_{N-1} \dots dy_2 dy_1 \quad (11)$$

gilt für die Übergangsamplitude

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \int_{y(t_1)=x_1}^{y(t_2)=x_2} Dy e^{iS[y]}. \quad (12)$$

- Entspricht einer Summe/Integration über alle denkbaren Trajektorien von (x_1, t_1) nach (x_2, t_2) .
- Übergangsamplitude im Pfadintegralformalismus enthält keine Operatoren.
- Klassische Physik: Trajektorien erfüllen $\delta S = 0$.
- QM: Summe über alle Trajektorien (auch solche mit $\delta S \neq 0$), “gewichtet” mit klassischer Wirkung.

1.2 Beispiel: Die Übergangsamplitude des HOs

- Klassische Wirkung:

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right). \quad (13)$$

- BGl:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = \frac{\delta}{\delta x(t)} \int_{t_1}^{t_2} du \left(\frac{m}{2} \left(\frac{d}{du} x(u) \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2(u) \right) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} du \left(m \left(\frac{d}{du} x(u) \right) \frac{d}{du} \delta(u-t) - m\omega^2 x(u) \delta(u-t) \right) = \\ &= \underbrace{m \left(\frac{d}{du} x(u) \right) \delta(u-t) \Big|_{u=t_1}^{u=t_2}}_{=0 \text{ da } t_1 < t < t_2} + \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} du \left(-m \left(\frac{d^2}{du^2} x(u) \right) \delta(u-t) - m\omega^2 x(u) \delta(u-t) \right) = -m\ddot{x}(t) - m\omega^2 x(t) \end{aligned} \quad (14)$$

(nur an dieser Stelle so detailliert, ähnliche Rechnungen im Folgenden eher knapp).

- Sei $x_{cl}(t)$ Lösung dieser BGl mit RBs $x_{cl}(t_1) = x_1$ und $x_{cl}(t_2) = x_2$. Dann kann ein beliebiger Pfad $x(t)$ gemäß $x(t) = x_{cl}(t) + y(t)$ geschrieben werden mit $y(t_1) = 0$ und

$y(t_2) = 0$ ($y(t)$ ist also unabhängig von den RBs). Für die Wirkung folgt

$$\begin{aligned}
S[x] &= \\
&= S[x_{\text{cl}}] + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \Big|_{x=x_{\text{cl}}}}_{=0 \text{ (BGI)}} y(t) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t) \delta x(t')} \Big|_{x=x_{\text{cl}}} y(t) y(t') + \\
&\dots = \\
&= S[x_{\text{cl}}] + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \delta(t-t') \left(-m \frac{d^2}{dt'^2} - m\omega^2 \right) y(t) y(t') = \\
&= S[x_{\text{cl}}] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{y}^2(t) - \frac{m\omega^2}{2} y^2(t) \right), \tag{15}
\end{aligned}$$

wobei

$$\frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t) \delta x(t')} = \delta(t-t') \left(-m \frac{d^2}{dt'^2} - m\omega^2 \right) \tag{16}$$

$$\frac{\delta^n S[x]}{\delta x(t) \delta x(t') \dots} = 0 \quad , \quad n \geq 3 \tag{17}$$

verwendet wurde.

- Übergangsamplitude:

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \int_{x(t_1)=x_1}^{x(t_2)=x_2} Dx e^{iS[x]} = e^{iS[x_{\text{cl}}]} \int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0} Dy e^{iS[y]} \tag{18}$$

(Abhängigkeit von den RBs vollständig im Vorfaktor $e^{iS[x_{\text{cl}}]}$).

- Übergangsamplitude, Vorfaktor $e^{iS[x_{\text{cl}}]}$:

– Klassische Lösung, die RBs erfüllt:

$$x_{\text{cl}}(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \tag{19}$$

$$x_{\text{cl}}(t_1) = A \sin(\omega t_1) + B \cos(\omega t_1) = x_1 \tag{20}$$

$$x_{\text{cl}}(t_2) = A \sin(\omega t_2) + B \cos(\omega t_2) = x_2. \tag{21}$$

Auflösen nach A und B , einsetzen in (19),

$$x_1 \sin(\omega t_2) - x_2 \sin(\omega t_1) = B \underbrace{\left(\cos(\omega t_1) \sin(\omega t_2) - \cos(\omega t_2) \sin(\omega t_1) \right)}_{=+\sin(\omega(t_2-t_1))} \tag{22}$$

$$x_1 \cos(\omega t_2) - x_2 \cos(\omega t_1) = A \underbrace{\left(\sin(\omega t_1) \cos(\omega t_2) - \sin(\omega t_2) \cos(\omega t_1) \right)}_{=-\sin(\omega(t_2-t_1))} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
x_{\text{cl}}(t) &= \\
&= \frac{1}{\sin(\omega(t_2-t_1))} \left(- \left(x_1 \cos(\omega t_2) - x_2 \cos(\omega t_1) \right) \sin(\omega t) + \right. \\
&\quad \left. \left(x_1 \sin(\omega t_2) - x_2 \sin(\omega t_1) \right) \cos(\omega t) \right). \tag{24}
\end{aligned}$$

– Einsetzen in die Wirkung:

$$S[x_{\text{cl}}] = \dots = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega(t_2 - t_1))} \left((x_1^2 + x_2^2) \cos(\omega(t_2 - t_1)) - 2x_1x_2 \right) \quad (25)$$

(längliche Rechnung, benutze z.B. Maple).

- Übergangsamplitude, Pfadintegral

$$F(t_1, t_2) = \int_{y(t_1)=0}^{y(t_2)=0} Dy e^{iS[y]} : \quad (26)$$

– Klassische Wirkung, partielle Integration:

$$S[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{y}^2 - \frac{m\omega^2}{2} y^2 \right) = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt y \left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) y \quad (27)$$

(Oberflächenterm verschwindet wegen $y(t_1) = y(t_2) = 0$).

– $F(t_1, t_2)$ ist Gauß-Integral (y tritt quadratisch auf), enthält allerdings einen Operator, $-(d^2/dt^2) - \omega^2$. Entferne Operator durch Entwicklung von y nach entsprechenden Eigenfunktionen:

* Eigenfunktionen y_j von $-(d^2/dt^2) - \omega^2$, die RBs $y_j(t_1) = y_j(t_2) = 0$ erfüllen:

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) y_j = \lambda_j y_j \rightarrow y_j = \sqrt{\frac{2}{t_2 - t_1}} \sin \left(\frac{j\pi(t - t_1)}{t_2 - t_1} \right) \quad (28)$$

mit Eigenwerten

$$\lambda_j = \frac{j^2 \pi^2}{(t_2 - t_1)^2} - \omega^2 \quad (29)$$

($j = 1, 2, \dots$).

* Entwicklung von y :

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j. \quad (30)$$

* Einsetzen in die Wirkung:

$$\begin{aligned} S[y] &= \frac{m}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_j a_k \int_{t_1}^{t_2} dt y_j \left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) y_k = \\ &= \frac{m}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_j a_k \int_{t_1}^{t_2} dt y_j \lambda_k y_k = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \lambda_j, \end{aligned} \quad (31)$$

wobei die Orthonormalität

$$\int_{t_1}^{t_2} dt y_j y_k = \delta_{jk} \quad (32)$$

verwendet wurde.

– Transformation der Integrationsvariablen:

$$Dy = \underbrace{\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(y(t_1 + \epsilon) \ y(t_1 + 2\epsilon) \ \dots)}{\partial(a_1 \ a_2 \ \dots)} \end{pmatrix} \right|}_{=J \text{ (Jacobi-Determinante)}} \prod_{j=1}^{\infty} da_j. \quad (33)$$

Da $y = \sum_j a_j y_j$, ist $\partial y(t_1 + j\epsilon)/\partial a_k$ und damit J a_j -unabhängig. Da $y = \sum_j a_j y_j$ und y_j ω -unabhängig (Gleichung (28)), ist auch $\partial y(t_1 + j\epsilon)/\partial a_k$ und damit J ω -unabhängig. Es folgt

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2) &= J \int \left(\prod_{j=1}^{\infty} da_j \right) \exp \left(i \frac{m}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \lambda_k \right) = \\ &= J \prod_{j=1}^{\infty} \left(\int da_j \exp \left(i \frac{m}{2} a_j^2 \lambda_j \right) \right) = J \prod_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{im\lambda_j}}. \end{aligned} \quad (34)$$

– Bestimme $F(t_1, t_2)$ ohne J auszurechnen:

* Für $\omega = 0$ ist die Übergangsamplitude des HOs identisch zu der des freien Teilchens (Gleichung (5) mit $x_1 = x_2 = 0$):

$$F_{\omega=0}(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_2 - t_1)}}. \quad (35)$$

* Berechne Verhältnis:

$$\begin{aligned} \frac{F(t_1, t_2)}{F_{\omega=0}(t_1, t_2)} &= \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{j^2 \pi^2}{(t_2 - t_1)^2} - \omega^2}{\frac{j^2 \pi^2}{(t_2 - t_1)^2}} \right)^{-1/2} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2 (t_2 - t_1)^2}{j^2 \pi^2} \right)^{-1/2} = \\ &= \left(\frac{\sin(\omega(t_2 - t_1))}{\omega(t_2 - t_1)} \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (36)$$

wobei die ω -Unabhängigkeit von J verwendet wurde sowie die Produktentwicklung des Sinus,

$$\sin(x) = x \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{j^2 \pi^2} \right). \quad (37)$$

* Damit

$$F(t_1, t_2) = F_{\omega=0}(t_1, t_2) \left(\frac{\sin(\omega(t_2 - t_1))}{\omega(t_2 - t_1)} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin(\omega(t_2 - t_1))}}. \quad (38)$$

• Übergangsamplitude, Endergebnis:

$$\begin{aligned} \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle &= e^{iS[x_{cl}]} F(t_1, t_2) = \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin(\omega(t_2 - t_1))}} \\ &\quad \exp \left(i \frac{m\omega}{2 \sin(\omega(t_2 - t_1))} \left((x_1^2 + x_2^2) \cos(\omega(t_2 - t_1)) - 2x_1 x_2 \right) \right). \end{aligned} \quad (39)$$

;

Literatur

- [1] L. H. Ryder, “Quantum field theory,” Cambridge University Press.
- [2] M. Srednicki, “Quantum field theory,” Cambridge University Press.
- [3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An introduction to quantum field theory,” Perseus Books.
- [4] C. Itzykson and J.-B. Zuber, “Quantum field theory,” Dover Books on Physics.
- [5] I. Montvay and G. Münster, “Quantum fields on a lattice,” Cambridge University Press.
- [6] H. J. Rothe, “Lattice gauge theories: an introduction,” World Scientific Lecture Notes in Physics.
- [7] R. P. Feynman, “Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics,” Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).
- [8] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010) and 2011 partial update for the 2012 edition.
- [9] K. Jansen *et al.* [ETM Collaboration], “ $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ from the static potential for QCD with $n_f = 2$ dynamical quark flavors,” JHEP **1201**, 025 (2012) [arXiv:1110.6859 [hep-ph]].
- [10] P. Schmüser, “Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker,” Springer (1988).
- [11] M. Wagner, “Numerische Methoden der Physik (Aufgabenblatt 04, Aufgabe 07),” Vorlesung, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Wintersemester 2011/12. Springer (1988).
- [12] K. E. Cahill, “Noncompact lattice simulations of SU(2) gauge theory,” Phys. Lett. B **304**, 307 (1993) [hep-lat/9301010].

A QM Übergangsamplitude, Probleme

- Gleichung (5) (QM Übergangsamplitude, freies Teilchen):

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_2 - t_1)}} \exp\left(+i \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}\right). \quad (40)$$

Scheint unsinnig, da $W_{x_1 \rightarrow x_2} = |\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle|^2$, die Wahrscheinlichkeit das zum Zeitpunkt t_1 bei x_1 präparierte Teilchen zum Zeitpunkt t_2 bei x_2 zu finden, unabhängig von x_1 und x_2 ist und außerdem $\int dx_2 W_{x_1 \rightarrow x_2} \neq 1$.

- Ersetze $|x_1\rangle$ durch $|\psi\rangle$, ein bei $x = 0$ zentriertes Gaußsches Wellenpaket mit Breite σ :

$$\begin{aligned} \langle x_2, t_2 | \psi, t_1 \rangle &= \int dp \langle x_2 | e^{-iH(t_2 - t_1)} | p \rangle \langle p | \psi \rangle = \\ &= \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx_2} e^{-i(p^2/2m)(t_2 - t_1)} \frac{\sqrt{\sigma}}{\pi^{1/4}} e^{-p^2\sigma^2/2} = \\ &= \left(\frac{\sigma}{2\pi^{3/2}}\right)^{1/2} \int dp \exp\left(-\left(\frac{\sigma^2 m + i(t_2 - t_1)}{2m}\right)p^2 - ix_2 p - \frac{mx_2^2}{2(\sigma^2 m + i(t_2 - t_1))}\right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{mx_2^2}{2(\sigma^2 m + i(t_2 - t_1))}\right) = \\ &= \left(\frac{\sigma m}{\sqrt{\pi}(\sigma^2 m + i(t_2 - t_1))}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mx_2^2}{2(\sigma^2 m + i(t_2 - t_1))}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

- Für $x_1 = 0$ und im Limes $\sigma \rightarrow 0$ ist (41) mit (40) im Exponentialanteil identisch, nicht jedoch im Vorfaktor. Dies liegt an der Tatsache, dass der Ortseigenzustand $|x_1\rangle = \delta(x - x_1)$ nicht normiert ist. Wählt man an Stelle des normierten Gaußschen Wellenpakets $|\psi\rangle = (\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-x^2/2\sigma^2}$ ein nicht-normiertes in dem Sinn, dass $\lim_{\sigma \rightarrow 0} |\psi\rangle = \delta(x)$, also $|\psi\rangle = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-x^2/2\sigma^2}$, erhält (41) einen zusätzlichen Faktor $(2\sqrt{\pi}\sigma)^{-1/2}$ und (41) und (40) stimmen im Limes $\sigma \rightarrow 0$ überein (guter Test).
- $\int dx_2 \tilde{W}_{0 \rightarrow x_2} = 1$ mit $\tilde{W}_{0 \rightarrow x_2} = |\langle x_2, t_2 | \psi, t_1 \rangle|^2$ erfüllt, falls σ behalten wird, also nicht $= 0$ gesetzt wird (Problem $\int dx_2 W_{x_1 \rightarrow x_2} \neq 1$ eng verknüpft mit der Verwendung von (4) für $\text{Re}(a) = 0$; Problem tritt nicht auf, bei Rechnung mit Gaußschem Wellenpaket, da dann $\text{Re}(a) > 0$; zeigt also die Gefahr bei Verwendung von Minkowski-Pfadintegralen ohne “ ϵ -Regulator”).
- $\tilde{W}_{0 \rightarrow x_2}$ hängt für $\sigma > 0$ von x_2 ab, nicht mehr jedoch für $\sigma = 0$ (Interpretation: Ein perfekter Ortseigenzustand delokalisiert instantan).