EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENFELDTHEORIE

SoSe 2025 – PROF. MARC WAGNER

MICHAEL EICHBERG: eichberg@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 13

Zu besprechen in den Tutorien vom 22.07. und 25.07.2025.

Aufgabe 1 [Fermionverdopplung in Gitter-QCD und Wilson-Term]

Betrachte die Dirac-Gleichung für ein freies Fermion in 1 + 1-dimensionaler Minkowski-Raumzeit

$$\underbrace{(i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_x - m)}_{=D(t,x)}\psi(x,t) = 0 \quad (1)$$

mit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

ψ ist in diesem Fall ein Spinor mit 2 Komponenten. Um Differentialgleichungen wie die Dirac-Gleichung (1) numerisch zu lösen, ist es üblich, die Raumzeit zu diskretisieren und Ableitungen durch symmetrische finite Differenzen zu approximieren, d.h.

$$\tilde{\partial}_x f(x) = \frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a}, \quad (3)$$

wobei a der Gitterabstand ist.

- (i) Verwende als Lösungsansatz ebene Wellen $\psi(x,t) = e^{i(Et-px)}u(p,E)$ und stelle die Dirac-Gleichung im Impulsraum sowohl mit kontinuierlichem x , als auch mit diskretisiertem $x = na$ auf. t ist in beiden Fällen eine kontinuierliche Koordinate, dennoch bezeichnen wir im Folgenden den Fall mit diskretisiertem x als “Gitter”. Löse nun die Dirac-Gleichung im Impulsraum im Kontinuum mit dem Ansatz

$$u(p,E) = (-\gamma^0 E + \gamma^1 p + m)v \quad (4)$$

ein, wobei v ein Vektor mit zwei Komponenten ist. Finde einen analogen zielführenden Ansatz für $u(p,E)$ auf dem Gitter und zeige, dass v auf dem Gitter für vorgegebene Energie E doppelt so viele Lösungen hat wie im Kontinuum. Argumentiere z.B. für den Spezialfall $E^2 = m^2$, dass das Ergebnis aus physikalischer Sicht einer Verdopplung der Anzahl von Fermionen mit Masse m entspricht. Zeige im Anschluss, dass die Diskretisierung von d Dimensionen zu 2^d Fermionen führt.

- (ii) Nielsen und Ninomiya haben 1981 bewiesen, dass bei jeder “lokalen” Diskretisierung des Dirac-Operators, die keine Fermionen-Verdopplung zur Folge hat, entweder Hermitizität oder chirale Symmetrie verloren geht.

Zeige auf gleichem Weg wie in Teilaufgabe (i), dass die Dirac-Gleichung auf dem Gitter mit der unsymmetrischen diskretisierten Ableitung

$$\hat{\partial}_x f(x) = \frac{f(x+a) - f(x)}{a} \quad (5)$$

gleich viele Lösungen für vorgegebene Energie E hat, wie die wie im Kontinuum, der Dirac-Operator, allerdings nicht mehr hermitesch ist.

- (iii) Betrachte nun die modifizierte Dirac-Gleichung in 3+1 Euklidischen Raumzeitdimensionen

$$\left(\gamma_\mu \tilde{\partial}_\mu - \frac{ra}{2} \tilde{\partial}_\mu^2 + m \right) \psi(x, t) = 0 \quad (6)$$

mit sogenanntem Wilson-Term $-\frac{ra}{2} \tilde{\partial}_\mu^2$, wobei r ein zusätzlicher Parameter ist, und diskretisiertem Laplace-Operator

$$\tilde{\partial}_\mu^2 f(x) = \frac{f(x - ae_\mu) - 2f(x) + f(x + ae_\mu)}{a^2}. \quad (7)$$

Im Impulsraum bekommt man hiermit

$$\left(\sum_\mu \frac{i\gamma_\mu \sin(p_\mu a) + r(1 - \cos(p_\mu a))}{a} + m \right) u(p, E) = 0, \quad (8)$$

Bestimme die Lösungen dieser Gleichung. Untersuche, was mit den bei $r = 0$ verdoppelten Fermionen bei $r = 1$, d.h. mit Wilson-Term, passiert. Argumentiere, dass die Masse solcher Fermionen mindestens $m + \frac{2}{a}$ ist. Welche Konsequenzen ergeben sich im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$?

Aufgabe 2 [Diskretisierung der Eichwirkung]

In Gittereichtheorien verwendet man sogenannte Linkvariablen $U_\mu(x) = e^{\pm ieaA_\mu(x)}$, um das Eichfeld darzustellen, wobei a den Gitterabstand und g eine Kopplung bezeichnen. In dieser Aufgabe beschränken wir uns auf die Eichgruppe $U(1)$, für die $A_\mu(x)$ keine Matrix-Struktur hat. Das Vorzeichen im Index zeigt dabei die Ausrichtung der Linkvariable an, d.h. ein Gitterschritt der Länge a von x in positive bzw. negative μ -Richtung und es gilt $U_{-\mu}(x) = U_\mu^\dagger(x - ae_\mu)$. Linkvariablen sind notwendig zur sinnvollen Diskretisierung der kovarianten Ableitung

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow \tilde{D}_\mu \psi(x) = \frac{U_\mu(x)\psi(x + ae_\mu) - U_{-\mu}(x)\psi(x - ae_\mu)}{2a}. \quad (9)$$

Der diskretisierte kinetische Term in der Dirac-Gleichung, $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \tilde{D}_\mu \psi(x)$, ist damit auch auf einem Gitter mit endlichem a eichinvariant.

- (i) Zeige mithilfe des Transformationsverhaltens von Fermionen und Linkvariablen unter Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow \Omega(x)\psi(x), \quad (10)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)\Omega^\dagger(x), \quad (11)$$

$$U_\mu(x) \rightarrow \Omega(x)U_\mu(x)\Omega^\dagger(x + ae_\mu), \quad (12)$$

$$U_{-\mu}(x) \rightarrow \Omega(x)U_{-\mu}(x)\Omega^\dagger(x - ae_\mu), \quad (13)$$

die eben genannte Tatsache, dass die rechte Seite von Gl. (9) eichinvariant ist.

- (ii) Eine einfache Definition der Wirkung des Eichfelds in Form von Linkvariablen ist durch die sogenannte Wilson-Plaquetten-Wirkung gegeben:

$$S_G[U] = \frac{1}{e^2} \sum_x \sum_{\mu, \nu} \operatorname{Re}(1 - U_{\mu\nu}(x)) , \quad (14)$$

wobei die Plaquette als ein Quadrat aus Linkvariablen definiert ist,

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + ae_\mu)U_{-\mu}(x + ae_\mu + ae_\nu)U_{-\nu}(x + ae_\nu) . \quad (15)$$

Zeige, dass

$$S_G[U] = \frac{a^4}{4e^2} \sum_x \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^2) \quad (16)$$

gilt. Argumentiere, dass sich im Kontinuumslimit die bekannte Wirkung des Eichfelds ergibt, also

$$S_G^{\text{continuum}}[A] = \frac{1}{4e^2} \int d^4x F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) . \quad (17)$$