

EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENFELDTHEORIE

SoSe 2025 – PROF. MARC WAGNER

MICHAEL EICHBERG: eichberg@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 12

Zu besprechen in den Tutorien am 15.07. und 18.07.2025.

Aufgabe 1 [Divergenzen in Euklidischer ϕ^3 -Theorie]

Betrachte die Euklidische ϕ^3 -Theorie in $d = 4$ Raumzeitdimensionen mit

$$S[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) + \frac{m}{2} \phi^2(x) + \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x). \quad (1)$$

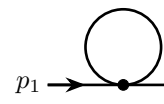
Zeichne alle Feynman-Diagramme mit nicht-negativem oberflächlichen Grad der Divergenz. Berechne dann den tatsächlichen Grad der Divergenz für jedes dieser Diagramme.

Aufgabe 2 [Integration in d Raumzeitdimensionen]

Studiere im Detail den Abschnitt “Einschub: Integration in d Raumzeitdimensionen” im Skript, d.h. Gl. (322) bis Gl. (333). Fasse die Kernidee jedes Umformungsschritts in ein oder zwei Sätzen zusammen. Recherchiere außerdem in der Literatur zur Gamma-Funktion (z.B. Wikipedia; es ist nicht notwendig sehr tief einzusteigen; für Renormierung und auch andere Rechnungen und Themenkomplexe aus der fortgeschrittenen theoretischen Physik mag es aber hilfreich sein sich ca. 30 min mit der Gamma-Funktion und deren Eigenschaften zu beschäftigen). Fasse abschließend nochmals in ca. 5 Sätzen die Grundidee zusammen, wie ein in einem Feynman-Diagramm auftretendes Integral in d Dimensionen, $\int d^d k \dots$, in eine Form gebracht werden kann, die auch für nicht ganzzahlige d definiert ist und ausgewertet bzw. weiterverarbeitet werden kann.

Aufgabe 3 [Dimensionale Regularisierung von ϕ^4 -Theorie]

In der Vorlesung wurde das Diagramm


$$p_1 \rightarrow \bullet \leftarrow p_2 \quad \text{with a bubble loop} \quad = \frac{\lambda}{2} \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \pi^2 m^2 \left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \ln \left(\frac{\mu^2}{\pi m^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \quad (2)$$

¹ der reellen ϕ^4 -Theorie in Euklidischer dimensionaler Regularisierung mit $\epsilon = 4 - d$ besprochen, wobei auf der rechten Seite von Gl. (2) die äußeren Linien

¹In der Literatur wird die Euler-Mascheroni-Konstante oft auch γ_E genannt.

nicht explizit notiert sind. Zeige in ähnlicher Weise dass

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \frac{\lambda^2}{2} \mu^\epsilon \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \pi^2 \\
 &\times \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \int_0^1 dz \ln \left(\frac{\pi((p_3 + p_4)^2 z(1-z) + m^2)}{\mu} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}(\epsilon) \right)
 \end{aligned} \tag{3}$$

gilt.

Hinweis: Löse das Loop-Integral durch Umschreiben des Integranden mithilfe der sogenannten Feynman-Parametrisierung

$$\underbrace{\frac{1}{(q_1^2 + m^2)}}_{=a} \underbrace{\frac{1}{((q_1 - q_2)^2 + m^2)}}_{=b} = \frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{(az + b(1-z))^2}. \tag{4}$$