

Aufgabenblatt 11

Zu besprechen in den Tutorien am 08.07. und 11.07.2025.

Aufgabe 1 [Das statische Quark-Quark-Potential]

In der Vorlesung wurde das statische Quark-Antiquark-Potential in Störungstheorie berechnet. Dazu wurden Testzustände in Color-Singlet- und Color-Octet-Ausrichtung konstruiert. Analog dazu möchten wir nun das Quark-Quark-Potential berechnen.

- (i) Konstruiere eine Korrelationsfunktion $C_{QQ}(t)$ für ein statisches Quark-Quark-Paar und berechne das Potential $V_{QQ}(r) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}$ in Störungstheorie bis Ordnung g^2 für zunächst nicht festgelegtes Λ . Λ bezeichnet hier, genau wie im Skript, die Matrix, die die Farbausrichtung des QQ -Paares festlegt, gemäß $Q^a \gamma_5 \Lambda^{ab} Q^b$.
- (ii) Im Gegensatz zu einem $Q\bar{Q}$ -Paar, welches zu einem Farbsinglet oder -oktet kombiniert werden kann, entsprechen die beiden möglichen Farbkombinationen eines QQ -Paares einem Antitriplet oder Sextet. Das Antitriplet lässt sich durch

$$\left(\Lambda_k^{\text{antitriplet}}\right)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} \quad (1)$$

darstellen und das Sextet durch

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{\text{sextet}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_4^{\text{sextet}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_2^{\text{sextet}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Lambda_5^{\text{sextet}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_3^{\text{sextet}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \Lambda_6^{\text{sextet}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Argumentiere, dass die 9 angegebenen Matrizen linear unabhängig sind und damit eine Basis für Farbausrichtungen bilden. Antitriplet bedeutet, dass die 3 Kombinationen $Q^a \gamma_5 (\Lambda_k^{\text{antitriplet}})^{ab} Q^b$, $k = 1, 2, 3$ unter $SU(3)$ Farbroationen $Q^a \rightarrow g^{ab} Q^b$, $g \in SU(3)$, untereinander mischen, nicht jedoch mit den analogen 6 Kombinationen des Sextets. Zeige dies exemplarisch, indem Du die Wirkung der speziellen infinitesimalen Farbroation $g = e^{i\epsilon \lambda^1/2}$ mit der Gell-Mann-Matrix

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

auf die 3 oben genannten Kombinationen betrachtest.

Ist das Antitriplet bzw. Sextet symmetrisch oder antisymmetrisch unter Quarkvertauschung?

Führe nun eine Rechnung analog zum Skript aus und berechne das Antitriplet- sowie das Sextet-Potential. Von zentraler physikalischer Bedeutung ist hierbei vor allem der Farbfaktor $\frac{\text{Tr}(\Lambda^\dagger(\lambda^a)^\dagger\Lambda\lambda^a)}{\text{Tr}(\Lambda^\dagger\Lambda)}$. Gib die finalen Ausdrücke für $V_{QQ}^{\text{antitriplet}}(r)$ und $V_{QQ}^{\text{sextet}}(r)$ an und diskutiere deine Ergebnisse im Vergleich mit $V_{QQ}^{\text{singlet}}(r)$ und $V_{QQ}^{\text{octet}}(r)$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 [T_{cc} -Tetraquark]

Diskutiere qualitativ möglicherweise existierende Tetraquarksysteme $\bar{c}\bar{c}qq$ (mit $q \in \{u, d\}$) unter Verwendung Deines Potentials aus Aufgabe 1. Finde insbesondere heraus, welcher Gesamtspin J für ein solches Tetraquark möglich, bzw. ausgeschlossen ist, wenn dieses Isospin $I = 0$ bzw. $I = 1$ hat.

- (i) Überlege Dir zunächst, welche Einstellungen bzw. Kombinationen im Flavor-, Farb- und Spinraum möglich sind. Gehe dabei vom Pauliprinzip aus, das sowohl für $\bar{c}\bar{c}$, als auch für qq gelten muss.

Hinweis: Das von Dir verwendete Potential für $\bar{c}\bar{c}$ aus Aufgabe 1 muss attraktiv sein, sonst würde kein Tetraquarkzustand vorliegen. Dies legt die $\bar{c}\bar{c}$ -Farbeinstellung fest.

- (ii) Kombiniere nun Deine Ergebnisse für $\bar{c}\bar{c}$ und für qq aus Teilaufgabe (i) und folgere mögliche Gesamtspins J sowohl für $I = 0$ als auch $I = 1$.
- (iii) Eine präzisere Rechnung als führende Ordnung Störungstheorie (z.B. mit numerischer Gitter-QCD) ergibt, dass ein $\bar{c}\bar{c}$ Potential mit leichten Quarks mit $I = 0$ deutlich stärker attraktiv ist, als wenn letztere mit $I = 1$ vorliegen. Auf welche Gesamtspins J sollte man sich bei einer experimentellen Suche nach solchen $\bar{c}\bar{c}qq$ -Tetraquarks also fokussieren? Wurde ein solches Tetraquark bereits experimentell entdeckt? Führe dazu eine Literaturrecherche aus (Schlagwort " T_{cc} -Tetraquark") und halte Deine wesentlichen Erkenntnisse in einer verbalen Kurzbeschreibung von ca. 5 bis 10 Sätzen fest (Quantenzahlen, Ort und Zeitpunkt der Entdeckung, Besonderheiten, etc.).