Einführung in die Quantenfeldtheorie

SoSe 2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: `winstel@itp.uni-frankfurt.de`

Aufgabenblatt 10

Zu besprechen in den Tutorien am 01.07 und 04.07.2025

Aufgabe 1 [*Symmetrien und Quantenzahlen*]

Symmetrietransformationen $\hat{R}$ sind eng mit Erhaltungsgrößen T verwandt, wie bspw. in der klassischen Physik aus dem Noether-Theorem folgt.

In der Quantentheorie generiert der Operator $\hat{T}$ zur zugehörigen Erhaltungsgröße T eine Symmetrietransformation

$$\hat{R}(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{T}}. \tag{1}$$

Wir betrachten zunächst ein Beispiel aus der Quantenmechanik.

(i) Zeige, dass
$$\hat{S}(a)\psi(x) = \exp(\mathrm{i}a\hat{P})\psi(x) = \psi(x+a), \tag{2}$$
wobei $\hat{P}$ der Impulsoperator und $\psi(x)$ eine Wellenfunktion ist.

Nun gehen wir über zur QCD und betrachten den Zustand

$$|\Phi\rangle = \int \mathrm{d}^3x\, \hat{\bar{u}}(\mathbf{x})\gamma_5\hat{d}(\mathbf{x})|\Omega\rangle, \tag{3}$$

wobei $|\Omega\rangle$ das QCD-Vakuum ist.

(ii) Räumliche Rotationen um die j-Achse werden durch den (Gesamt-)Drehimpulsoperator $\hat{J}_j$ generiert, $\hat{R}_j(\alpha) = \exp(\mathrm{i}\alpha\hat{J}_j)$, wobei α der Drehwinkel ist. Deren Wirkung auf die vier Spinkomponenten der Quarkfeld-Operatoren ist durch
$$\hat{R}_j(\alpha)\hat{\psi} = \exp\left(\alpha\epsilon_{jkl}\frac{\gamma^k\gamma^l}{4}\right)\hat{\psi} \tag{4}$$
gegeben. Warum ist das so? Überprüfe, ob $|\Phi\rangle$ ein Zustand mit definierten Quantenzahlen J_z und J^2 ist und berechne deren Wert.

Hinweis: Beachte, dass sich auch die räumlichen Koordinaten der Quarkfeld-Operatoren verändern, gemäß Gl. (1) nach Einsetzen des Bahndrehimpulsoperators für $\hat{T}$.

(iii) Isospin Rotation bezüglich der j-Achse werden durch Isospinoperatoren $\hat{I}_j$ generiert, $\hat{\hat{R}}_j(\alpha) = \exp(\mathrm{i}\alpha\hat{I}_j)$. Deren Wirkung auf das Quark-Doublet ist durch
$$\hat{\hat{R}}_j(\alpha)\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{d}\end{pmatrix} = \exp(\mathrm{i}\alpha\hat{I}_j)\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{d}\end{pmatrix} = \exp\left(\mathrm{i}\alpha\frac{\sigma_j}{2}\right)\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{d}\end{pmatrix} \tag{5}$$
gegeben. Überprüfe, ob $|\Phi\rangle$ ein Zustand mit definierten Isospinquantenzahlen ist und berechne deren Wert unter Verwendung der Operatoren $\hat{I}_z$ und $\hat{I}^2 = \hat{I}_x^2 + \hat{I}_y^2 + \hat{I}_z^2$.

(iv) Parität ist eine diskrete Symmetrie mit Eigenwerten ± 1. Ihre Wirkung auf die Quark-Feldoperatoren ist durch $\hat{P}(\hat{\psi}) = \gamma^0 \hat{\psi}$ gegeben. Ist die Parität von $|\Phi\rangle$ definiert? Was ist der zugehörige Eigenwert?

(v) Durchsuche das Particle-Data-Booklet und leite daraus ab, welche Hadronen einen nicht-verschwindenden Überlapp mit dem Zustand $|\Phi\rangle$ haben.

(vi) Argumentiere, dass sich die Korrelationsfunktion $\langle \Phi(t)|\Phi(0)\rangle$ für $t \to \infty$ in der Euklidischen Formulierung von QCD entsprechend

$$\langle \Phi(t)|\Phi(0)\rangle \sim \mathrm{e}^{-mt} \tag{6}$$

verhält. Welche Hadronmasse korrespondiert zu m?

(vii) Wiederhole die obigen Schritte mit dem Zustand

$$|\Phi\rangle = \int \mathrm{d}^3x\, \hat{\bar{u}}(\mathbf{x})\gamma_j \hat{d}(\mathbf{x})|\Omega\rangle. \tag{7}$$