Einführung in die Quantenfeldtheorie

SoSe 2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: `winstel@itp.uni-frankfurt.de`

Aufgabenblatt 9

Zu besprechen in den Tutorien am 24.06. und 27.06.2025.

Aufgabe 1 [*Feynman-Regeln in axialer Eichung*]

Stelle die effektive Wirkung für Euklidische QCD in axialer Eichung

$$\eta_\mu A^a_\mu = 0 \tag{1}$$

auf, wobei η_μ ein fest gewählter Euklidischer Einheitsvektor ist, d.h.

$$\eta_\mu \eta_\mu = 1 \tag{2}$$

gilt. Leite die Feynman-Regeln für Quark-Gluon-Wechselwirkungen, sowie den Gluon-Propagator im Impulsraum her.
Hinweis: Für das Invertieren des Gluon-Operators ist der Ansatz

$$\left(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu - \frac{1}{\alpha}\eta_\mu\eta_\nu\right)^{-1} = A g_{\mu\nu} + B k_\mu k_\nu + C(k_\nu \eta_\mu + k_\mu \eta_\nu) \tag{3}$$

geeignet.

Aufgabe 2 [*Mittelung über Eichfixierungen*]

In der Vorlesung wurde das erzeugende Funktional (Gl. (247))

$$Z[J] = \frac{1}{Z}\int \mathrm{D}A\, \delta[F(A)]\Delta_{\mathrm{FP}}[A] \exp\left(-S[A] + \int \mathrm{d}^4x\, J^a_\mu(x) A^a_\mu(x)\right) \tag{4}$$

in die Form

$$Z[J] = \frac{1}{Z}\int \mathrm{D}A \int \mathrm{D}c\mathrm{D}\bar{c}\, \exp\Bigg(-S_{\mathrm{eff}}[A, c, c^*] + \int \mathrm{d}^4x \left(J^a_\mu(x) A^a_\mu(x) + (\alpha^a)^*(x) c^a(x) + (c^a)^*(x)\alpha^a(x)\right)\Bigg) \tag{5}$$

gebracht. In dieser Aufgabe geht es darum, die Details der durchgeführten Rechenschritte besser zu verstehen.

(i) Zeige, dass das Integrationsmaß DA invariant unter Eichtransformationen ist, also

$$\mathrm{D}A^g = \mathrm{D}A\,. \tag{6}$$

Hinweis: Beginne mit infinitesimalen Eichtransformationen (Gl. (231) im Skript) und verwende

$$\det(\delta^{ab} + f^{abc}\Lambda^c) = 1 + \mathrm{Tr}(f^{abc}\Lambda^c) + \mathcal{O}(\Lambda^2)\,, \tag{7}$$

um die Jacobi-Determinante zu berechnen. Zeige dann, dass auch Eichtransformationen mit endlichem $\Lambda(x)$ das Integrationsmaß nicht verändern, indem du N Eichtransformationen mit $\Lambda(x)/N$ durchführst und den Limes $N \to \infty$ betrachtest.

(ii) Erkläre die Rechenschritte zwischen Gl. (247) und Gl. (259) im Skript in eigenen Worten. Zu welchem Zweck und mit welcher Rechtfertigung ändert man die Eichfixierung $\delta[F(A)]$ zu $\delta[F(A) - B]$?

(iii) Die auftretenden Geister c erfüllen zwar das Pauli-Prinzip, besitzen jedoch keinen Spin. Was ist der wesentliche strukturelle Unterschied zwischen $A^{-1}(x,y)$ in Gl. (218) vom Dirac-Feld und dem zu $M^{ab}(x,y)$ gehörigen $A^{-1}(x,y)$ in Gl. (251) vom Geist-Feld, an dem man dies erkennen kann?

(iv) In Gl. (255) wird über alle B^a gemittelt. Zeige im Detail, dass dies ein valider Umformungsschritt ist.

Hinweis: Zeige bzw. argumentiere zunächst, dass

$$\int \mathrm{D}A \int \mathrm{D}c\mathrm{D}\bar{c}\, \delta[F(A){-}B] \exp\left(-S[A] - \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\, (c^a)^*(x) M^{ab}(x,y) c^b(y)\right)$$

unabhängig von B ist.