Einführung in die Quantenfeldtheorie

SoSe 2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: `winstel@itp.uni-frankfurt.de`

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 [*Freier Fermion-Propagator*]

(i) In der Vorlesung wurde für den Euklidischen Formalismus der folgende freie Fermion-Propagator angegeben:

$$S_F(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip(x-y)}\, \frac{i\gamma_\mu p_\mu + m}{p^2+m^2}\,. \tag{1}$$

Leite diesen Ausdruck als das Inverse $S_F(x,y) = A^{-1}(x,y)$ des Operators A her, welcher in der Wirkung

$$S[\psi,\overline{\psi}] = \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y\, \overline{\psi}(x)\, \underbrace{\delta^{(4)}(x-y)\left(\gamma_\mu \partial_\mu^{(y)} + m\right)}_{=A(x,y)} \psi(y) \tag{2}$$

für freie Fermionen auftritt.

(ii) Führe die Integration über p_0 in Gl. (1) aus um $S_F(\boldsymbol{p},t)$ in der Zeit-Impuls darstellung zu erhalten, wobei $t = x_0 - y_0$.

(iii) Nutze $S_F(\boldsymbol{p},t)$, um den VEV

$$\langle\Omega| \left(\int \mathrm{d}^3x\, \psi(\boldsymbol{x},t)\right)\left(\int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger(\boldsymbol{x},0)\right)|\Omega\rangle \tag{3}$$

für freie Fermionen zu berechnen. Wie ist dieses Ergebnis physikalisch zu interpretieren?

Aufgabe 2 [*Faddeev-Popov Methode*]

Betrachte das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, e^{-(x^2+y^2)}\,. \tag{4}$$

Löse dieses Integral auf Faddeev-Popov-motiviertem Weg entsprechend den in den folgenden Teilaufgaben skizzierten Schritten. Nutze die $U(1)$-Invarianz der "Wirkung" x^2+y^2 und stelle die Identität

$$1 = \Delta_{\mathrm{FP}}(x,y) \int \mathrm{d}g\, \delta(F(x^g,y^g))\,. \tag{5}$$

Die Invarianz unter Eichtransformationen der Wirkung einer Eichtheorie entspricht bei diesem einfachen Beispiel der Invarianz der Wirkung $x^2 + y^2$ unter Rotationen in der x-y-Ebene,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^g \\ y^g \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \tag{6}$$

(i) Betrachte als Startpunkt Gl. (5), wobei F eine Eichbedingung ist. F muss so gewählt sein, dass für jedes (x, y) mindestens ein g existiert, sodass $F(x^g, y^g) = 0$ gilt. Definiere nun eine geeignete Parametrisierung für g und vereinfache $\Delta_{\mathrm{FP}}^{-1}(x, y)$ so weit wie möglich.

(ii) Berechne $\Delta_{\mathrm{FP}}(x, y)$ explizit für $F(x, y) = y$.

(iii) Verwende die Identität (5) mit F aus Teilaufgabe (ii) um

$$I = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, \Delta_{\mathrm{FP}}(x, y) \int \mathrm{d}g \, \delta(F(x^g, y^g)) e^{-(x^2+y^2)} \tag{7}$$

zu berechnen und das Ergebnis $I = \pi$ zu bestätigen, welches man durch geradliniges Integrieren sehr einfach erhält. Folge dabei den Schritten aus der Vorlesung, wobei insbesondere auf das Abspalten des “Volumens des Eichorbits” zu achten ist.