

EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENFELDTHEORIE

SoSe 2025 – PROF. MARC WAGNER

MARC WINSTEL: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 [ϕ^4 Störungstheorie, Diagramme dritter Ordnung]

Betrachte die Wirkung der Euklidischen ϕ^4 -Theorie:

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x)) (\partial_\mu \phi(x)) + \frac{m}{2} \phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right). \quad (1)$$

- (i) Zeichne alle Feynman-Diagramme der Ordnung λ^3 , welche zur verbundenen 2-Punkt-Funktion $G_2^c(x_1, x_2)$ beitragen.
- (ii) Zeichne alle Feynman-Diagramme der Ordnung λ^3 , welche zur verbundenen 4-Punkt-Funktion $G_4^c(x_1, x_2, x_3, x_4)$ beitragen.
- (iii) Mache aus allen Diagrammen in Teilaufgabe (ii) Truncated Diagrams, schneide also alle äußeren Linien ab. Welche dieser Diagramme sind 1-particle-irreducible (1PI)?

Aufgabe 2 [Berechnung thermischer VEVs in der Quantenmechanik mit Pfadintegralen]

Betrachte den thermischen Erwartungswert

$$\langle x^2 \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \text{Tr} (e^{-\beta H} x^2), \quad (2)$$

$$Z = \text{Tr} (e^{-\beta H}). \quad (3)$$

für ein quantenmechanisches Teilchen in einer Raumdimension mit Ort x im Pfadintegralformalismus. Berechne $\langle x^2 \rangle_\beta$ für den harmonischen Oszillator, d.h. benutze die Euklidische Wirkung

$$S_E[x] = \int_0^\beta d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right). \quad (4)$$

Gehe dabei wie folgt vor:

- (i) Drücke Gl. (2) durch entsprechende Pfadintegrale aus.
- (ii) Führe eine Fouriertransformation in $\tau \in [0, \beta)$ in der Form

$$x(\tau) = \sum_n \tilde{x}_n e^{i\omega_n \tau} \quad (5)$$

durch, d.h. drücke alle Ausdrücke in denen $x(\tau)$ vorkommt durch die entsprechenden Fourierkoeffizienten $\tilde{x}_n$ aus. Hierbei sind $\omega_n = 2\pi nT$, $n \in \mathbb{N}$, die sogenannten Matsubarafrequenzen, welche häufig in der thermischen Quantenfeldtheorie auftauchen.

- (iii) Löse die auftretenden Integrale. Überlege, für welche Fouriermoden ein Beitrag auftritt. Dein Ergebnis sollte

$$\langle x^2 \rangle_\beta = \frac{1}{2m\omega} \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \quad (6)$$

lauten, wie bereits in Theo 5 typischerweise ohne Verwendung von Pfadintegralen gezeigt wurde.

Hinweis: Beim Lösen der Integrale ist es hilfreich, Gaußintegrale

$$\int_{\mathbb{C}} dz |z|^2 e^{-a|z|^2} = \frac{\pi}{a^2} \quad (7)$$

zu identifizieren. Hierbei ist z eine komplexe Variable und es wird über die gesamte komplexe Ebene integriert. Zudem wird die Lösung der Integrale in Teilaufgabe (iii) zunächst eine Reihe in n ergeben. Diese kann über

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a) \quad (8)$$

umgeschrieben werden. Letztere Identität kann über das komplexe Residuumsverfahren bewiesen werden, bei der man die Summe in eine Integration in der komplexen Ebene mit periodisch auftretenden Polen $k_0 = \omega_n$ umschreibt. Zum Beweis von Gl. (8) wird dann eine Konturdeformation und der Residuensatz verwendet.

Aufgabe 3 [Integrale über Grassmann Variablen]

Berechne

$$\int \left(\prod_i d\bar{\theta}_i d\theta_i \right) \theta_k \bar{\theta}_l e^{-\bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j} \quad (9)$$

sowie

$$\int \left(\prod_i d\bar{\theta}_i d\theta_i \right) \theta_k \theta_l e^{-\bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j} \quad (10)$$

unter Verwendung komplexer Grassmann Zahlen θ_i , $i = 1, \dots, N$. Verwende dabei keine Erweiterung der Integrale durch externe Quellen, sondern rechne die Integrale explizit aus.

Wie würde das Ergebnis des Integrals

$$\int \left(\prod_i d\bar{\theta}_i d\theta_i \right) \theta_k \theta_l \bar{\theta}_m \bar{\theta}_n e^{-\bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j} \quad (11)$$

aussehen? Diskutiere Parallelen zum in QFT1 besprochenen Wick-Theorem.