

EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENFELDTHEORIE

SoSe 2025 – PROF. MARC WAGNER

MARC WINSTEL: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 6

Zu besprechen in den Tutorien am 03.06 und 06.06.2025

Aufgabe 1 [Pfadintegral-Formalismus und Störungstheorie in Quantenmechanik]

Betrachte einen eindimensionalen quantenmechanischen anharmonischen Oszillator mit Euklidischer Wirkung

$$S[x] = \int dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{\lambda}{4!} x^4 \right). \quad (1)$$

- (i) Leite für den anharmonischen Oszillator mithilfe des Pfadintegral-Formalismus der Quantenmechanik die essenziellen Formeln der Störungsentwicklung in λ her, d.h. gib insbesondere das erzeugende Funktional an und wie daraus n -Punkt-Funktionen berechnet werden.

Hinweis: Gehe dabei analog zur Rechnung aus der Vorlesung in ϕ^4 -Theorie vor.

- (ii) Wende die in Teilaufgabe (i) hergeleiteten Formeln an, um den VEV von x^2 , also $\langle \Omega | x^2 | \Omega \rangle$, bis zur Ordnung λ zu berechnen.
- (iii) Überprüfe dein Ergebnis in führender Ordnung in λ , indem du es mit Techniken und Methoden vergleichst, welche du aus den Grundvorlesungen zur Quantenmechanik kennst (kanonischer Formalismus, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, zeitunabhängige quantenmechanische Störungstheorie).

Aufgabe 2 [Beziehungen zwischen n -Punkt-Funktionen und zusammenhängenden n -Punkt-Funktionen]

Betrachte eine wechselwirkende translationsinvariante skalare Quantenfeldtheorie mit erzeugendem Funktional $Z[J]$ für n -Punkt-Funktionen $G_n(x_1, \dots, x_n)$. Zudem ist $W[J] = \ln(Z[J])$ das erzeugende Funktional für zusammenhängende n -Punkt-Funktionen $G_n^c(x_1, \dots, x_n)$.

Beweise die folgenden Relationen:

- $G_1(x_1) = G_1^c(x_1)$,
- $G_2(x_1, x_2) = G_2^c(x_1, x_2) + G_1(x_1)G_1(x_2)$,
- $G_3(x_1, x_2, x_3) = G_3^c(x_1, x_2, x_3) - 2G_1(x_1)G_1(x_2)G_1(x_3) + G_2(x_1, x_2)G_1(x_3) + G_2(x_2, x_3)G_1(x_1) + G_2(x_3, x_1)G_1(x_2)$.

Fasse in eigenen Worten zusammen, wie die Definition von G_n^c als funktionale Ableitungen von $W[J]$ dafür sorgt, dass nur verbundene Diagramme auftreten. Erkennst du eine Systematik?