Einführung in die Quantenfeldtheorie

SoSe 2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 4

Zu besprechen in den Tutorien am 20.05 und 23.05.2025

Aufgabe 1 [*n-Punktfunktionen in einer freien skalaren Feldtheorie*]

In der Vorlesung wurde der Pfadintegralformalismus für reelle Skalarfelder mit der Euklidischen Wirkung

$$S_E[\phi] = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi(x)) + \frac{m^2}{2} \phi^2(x) \right) \tag{1}$$

vorgestellt. Das zugehörige erzeugende Funktional (der Parameter α der Wick-Rotation wurde beibehalten) lautet

$$Z[J] = \exp\left(-\frac{e^{-2i\alpha}}{2} \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4y \, J(x) \Delta_F(x,y) J(y) \right) , \tag{2}$$

wobei

$$\Delta_F(x,y) = i e^{i\alpha} \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{e^{+2i\alpha} p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2} \tag{3}$$

der Feynmanpropagator des reellen freien Skalarfelds ist.

(i) Berechne mithilfe des erzeugenden Funktionals die 4-Punktfunktion $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Zeichne für die einzelnen Terme die zugehörigen Feynmandiagramme.

(ii) Berechne mithilfe des erzeugenden Funktionals die 6-Punktfunktion $G_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_6)$. Zeichne für die einzelnen Terme die zugehörigen Feynmandiagramme.

(iii) Zeige, dass n-Punktfunktionen $G_n(x_1, \dots x_n)$ für ungerade n verschwinden.

Aufgabe 2 [*Komplexes Skalarfeld*]

Wir betrachten nun die Wirkung des komplexes Skalarfeldes

$$S_E[\phi] = \int \mathrm{d}^4x \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + m^2 |\phi|^2 \right) \tag{4}$$

in Euklidischer Zeit $t = -\mathrm{i}\tau$. Ziel dieser Aufgabe ist es, den aus der Vorlesung bekannten Pfadintegralformalismus für ein reelles Skalarfeld auf das komplexe Feld zu übertragen. Hierzu ist es sinnvoll, die Zerlegung $\phi = (\phi_A + \mathrm{i}\phi_B)/\sqrt{2}$ zu verwenden, wobei $\phi_{A/B}$ zwei voneinander unabhängige reelle Felder sind.

(i) Verallgemeinere den Pfadintegral-Formalismus aus der Vorlesung auf das komplexe Skalarfeld. Gib dazu Ausdrücke für die Übergangsamplitude und für VEVs an.

(ii) Definiere ein geeignetes erzeugendes Funktional $Z[J_A, J_B]$ mit reellwertigen Quellen J_A, J_B. Bringe durch Integration über die quadratisch auftretenden Felder das erzeugende Funktional $Z[J_A, J_B]$ in eine Form analog zu Gl. (97) im Skript, d.h. drücke Z durch Differentialoperatoren und Quellen aus. Drücke das erzeugende Funktional durch geeignet definierte komplexe Quellen J, J^*, zugehörig zu den Feldern ϕ, ϕ^*, aus.

(iii) Gib Ausdrücke an, mit denen VEVs aus dem in (ii) definierten erzeugenden Funktional gewonnen werden können.

(iv) Berechne die Zweipunktfunktionen

$$\langle\Omega|\phi(x_2)\phi(x_1)|\Omega\rangle, \qquad \langle\Omega|\phi^*(x_2)\phi(x_1)|\Omega\rangle, \tag{5}$$

wobei $t_2 > t_1$. Es ist sinnvoll, zunächst diese Zweipunktfunktionen durch Zweipunktfunktionen der Felder $\phi_{A/B}$ auszudrücken.

(v) Diskutiere deine Ergebnisse aus (iv) mithilfe deines Wissens über komplexe Klein-Gordon-Felder aus Quantenfeldtheorie I. Welche Quantenzahl bleibt für freie, komplexe Skalarfelder offenbar erhalten?

Anmerkung: In einschlägiger Literatur wird die Berechnung oftmals auf Basis von als unabhängig angenommenen Feldern ϕ und ϕ^* durchgeführt. Dies wird dadurch gerechtfertigt, dass im Pfadintegral ohnehin über alle komplexwertigen Feldkonfigurationen integriert wird, ist aber mathematisch unsauber. Insbesondere kann dies zu fehlerhaften Ergebnissen in Theorien führen, in denen die U(1)*-Symmetrie des komplexen Skalarfeldes verletzt wird (explizit oder durch spontane Symmetriebrechung).*