

EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENFELDTHEORIE

SoSe 2025 – PROF. MARC WAGNER

MARC WINSTEL: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 3

Zu besprechen in den Tutorien am 13.05 und 16.05.2025

Aufgabe 1 [Funktionalableitungen]

Betrachte die Wirkung

$$S[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\nu A^\nu \right), \quad (1)$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ der elektromagnetische Feldstärketensor und j_ν die Viererstromdichte der elektrischen Ladung ist.

Berechne die funktionale Ableitung

$$\frac{\delta S[A_\nu]}{\delta A_\mu(x)}. \quad (2)$$

und zeige, dass

$$\frac{\delta S[A_\nu]}{\delta A_\mu(x)} = 0 \quad (3)$$

äquivalent zur Maxwell-Gleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (4)$$

ist.

Aufgabe 2 [Spektralzerlegung von Operatoren]

Oft werden die Funktionen eines Operator über ihre Taylorentwicklung

$$f(A) = f(0) + f'(0)A + \frac{1}{2!}f''(0)A^2 + \dots \quad (5)$$

definiert. Ein prominentes Beispiel ist

$$e^A = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots \quad (6)$$

Mathematisch rigoroser ist die Verwendung der Spektralzerlegung. Für einen Operator mit diskretem Spektrum, d.h. mit Eigenwerten λ und zugehörigen Eigenvektoren $|\lambda\rangle$, ist diese gegeben durch

$$f(A) = \sum_\lambda f(\lambda) |\lambda\rangle \langle \lambda|. \quad (7)$$

Wir betrachten nun beispielhaft

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Was sind die Eigenwerte von A und B ? Verwende sowohl (6) als auch (7) um e^A und e^B zu berechnen und überzeuge dich damit, dass beide Resultate identisch sind.

Aufgabe 3 [VEVs und Observablen im harmonischen Oszillator]

Gegeben sei das erzeugende Funktional

$$Z[j] = \exp \left(\frac{1}{4m\omega} \int d\tau_1, d\tau_2, j(\tau_1) e^{-\omega|\tau_1 - \tau_2|} j(\tau_2) \right) \quad (9)$$

des harmonischen Oszillators in Euklidischer Zeit, siehe Kapitel 1.5 des Skripts.

- (i) Berechne den Erwartungswert der quadratischen Auslenkung

$$\langle \Omega | x^2 | \Omega \rangle \quad (10)$$

mithilfe von $Z[j]$.

- (ii) Berechne die Zweipunktfunktion des Operators

$$O(\tau) = x^2(\tau) - \langle \Omega | x^2(\tau) | \Omega \rangle, \quad (11)$$

d.h. berechne

$$\langle \Omega | O(\tau) O(0) | \Omega \rangle \quad (12)$$

mithilfe von $Z[j]$.

Bestimme das Verhalten der Zweipunktfunktion für $\tau \rightarrow \infty$ (es hat die Form $Ae^{-B\tau}$). Zeige, dass $B = E(\psi) - E(\Omega)$, wobei $|\psi\rangle$ ein spezieller angeregter Zustand im System ist. Welche Energiedifferenz wird auf diese Weise berechnet, d.h. um welchen Zustand handelt es sich bei $|\psi\rangle$? Welche Parität hat $|\psi\rangle$?

1. Kommentar: Eine Wiederholung der Eigenschaften der Eigenzustände des harmonischen Oszillators ist hilfreich.

2. Kommentar für Experten der QFT1 Vorlesung: Die in der Berechnung auftretende Vierpunktfunktion von x kann auch über das Wick-Theorem berechnet werden. Hierbei wird $\langle \Omega | x(\tau) x(0) | \Omega \rangle$ als Propagator interpretiert. Die Vierpunktfunktion ist dann durch verschwindende VEVs von normalgeordneten Operatoren und Propagatoren darstellbar. Dies ist keine elegantere oder einfachere Art der Berechnung aber eine schöne Wiederholung vom QFT1 Stoff.

- (iii) Finde einen Operator O_e , mit dem sich der Energieunterschied von $|\Omega\rangle$ zum niedrigsten Zustand negativer Parität durch eine Zweipunktfunktion

$$\langle \Omega | O_e(\tau) O_e(0) | \Omega \rangle \quad (13)$$

bestimmen lässt. Zeige über das Einfügen von Energieeigenzuständen an geeigneter Stelle, dass deine Wahl für O_e die geforderte Eigenschaft erfüllt, ohne (13) explizit zu berechnen. Berechne abschließend (13) mit dem erzeugenden Funktional.

(iv) Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle \Omega | x(\tau) x^2(0) x(-\tau) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | x(\tau) x(-\tau) | \Omega \rangle}. \quad (14)$$

Beschreibe in Worten welche physikalische Größe dieser Ausdruck beschreibt. Was ist ihre physikalische Bedeutung? Berechne anschließend (14) mit dem erzeugenden Funktional.