Einführung in die Quantenfeldtheorie

SoSe 2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: `winstel@itp.uni-frankfurt.de`

Aufgabenblatt 2

Zu besprechen in den Tutorien am 06.05 und 09.05.2025

Aufgabe 1 [*Symmetrische Trotter-Zerlegung*]

Zeige, dass Gl. (6) im Vorlesungsskript gilt. Verwende dazu die sogenannte Baker-Campbell-Haussdorf Formel

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{A+B+[A,B]/2+\ldots}, \tag{1}$$

wobei A und B (quantenmechanische) Operatoren sind. Innerhalb der Rechnung kann $A = -\mathrm{i}V(x)$ und $B = -\mathrm{i}p^2/2m$ definiert werden, sodass

$$\mathrm{e}^{\epsilon(A+B)} = \mathrm{e}^{\epsilon A/2}\mathrm{e}^{\epsilon B}\mathrm{e}^{\epsilon A/2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{2}$$

zu zeigen ist.

Hinweis: Es ist sinnvoll, mit der rechten Seite von Gl. (6) zu starten und die BCH-Formel zweimal anzuwenden.

Aufgabe 2 [*Zustandssumme des harmonischen Oszillators*]

In dieser Aufgabe wird die Zustandssumme Z des harmonischen Oszillators sowohl im klassischen als auch im quantenmechanischen Fall berechnet.

(i) Berechne Z für ein klassisches harmonisches Oszillatorsystem unter Verwendung des Phasenraumintegrals, d.h. berechne

$$Z = \frac{1}{2\pi}\int dx\, dp\, e^{-\beta H}. \tag{3}$$

(ii) Im quantenmechanischen Fall ist die Zustandssumme gemäß

$$Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H} = \sum_{\psi}\langle\psi|e^{-\beta H}|\psi\rangle \tag{4}$$

unter Verwendung einer orthonormalen, vollständigen Basis von Zuständen (hier mit nicht spezifizierten Quantenzahlen ψ) definiert. Berechne Z nun für einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator mithilfe der Eigenzustände des Hamiltonoperators.

(iii) Wiederhole die Berechnung unter Verwendung von Orts-Eigenzuständen. Berechne die für die Zustandssumme benötigten Matrixelemente $\langle x|\exp(-\beta H)|x\rangle$ im gleichen Stil, wie die Übergangsamplitude in Kapitel 1.2 des Skriptes berechnet wurde. Du solltest für die Matrixelemente

$$\langle x|\exp(-\beta H)|x\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\sin(\omega\beta)}}\exp\left\{i\frac{m\omega}{\sin(\omega\beta)}x^2\left(\cos(\omega\beta)-1\right)\right\} \tag{5}$$

erhalten. Vergleiche dein Ergebnis mit dem vorherigen.

(iv) Berechne die freie Energie $F = -\frac{1}{\beta} \log Z$ in allen drei Fällen und vergleiche sie für $\beta \ll 1$. Kannst du das beobachtete Verhalten erklären?