Einführung in die Quantenfeldtheorie
SoSe 2025 – Prof. Marc Wagner

Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 1

Zu besprechen in den Tutorien am 29.04 und 02.05.2025

Aufgabe 1 [*Übergangsamplituden in der Quantenmechanik*]

In der Vorlesung haben wir ein freies quantenmechanisches Teilchen im Pfadintegralformalismus betrachtet. Dabei haben wir gezeigt, dass die Übergangsamplitude von einem Zustand $|x_1, t_1\rangle$, in dem das Teilchen zum Zeitpunkt t_1 am Ort x_1 präpariert wurde, zu einem Zustand $|x_2, t_2\rangle$, in dem sich das Teilchen zum Zeitpunkt t_2 am Ort x_2 befindet, durch folgende Formel gegeben ist (allerdings wurde dabei $\int dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\pi/a}$ in fragwürdiger Weise auch für $\mathrm{Re}(a) = 0$ verwendet):

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i (t_2 - t_1)}} \exp\left(\frac{im(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}\right). \tag{1}$$

Dabei ist m die Masse des Teilchens und es gilt $\hbar = c = 1$.

1. Diskussion der Übergangswahrscheinlichkeit für ein lokalisiertes Teilchen

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen zum Zeitpunkt t_2 am Ort x_2 zu finden, wenn es zuvor zum Zeitpunkt t_1 am Ort x_1 präpariert wurde?

(ii) Von welchen Variablen hängt diese Übergangswahrscheinlichkeit ab? Ist die Übergangswahrscheinlichkeit korrekt normiert? Ergibt das Integral $\int dx_2$ über die Übergangswahrscheinlichkeit 1, wenn man die Normierung korrigiert, d.h. Ortseigenzustände gemäß $\delta(x)/\sqrt{\delta(0)}$ verwendet?

2. Übergangswahrscheinlichkeit für ein Gauß-förmig lokalisiertes Teilchen

Nun ersetzen wir den Anfangszustand durch ein gaußförmiges Wellenpaket mit Breite σ, zentriert um die Position x_1,

$$\langle x | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{2\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{x - x_1}{\sigma}\right)^2\right). \tag{2}$$

(iii) Berechne das Skalarprodukt zwischen $|\psi\rangle$ und dem Eigenzustand $|p\rangle$ des Impulsoperators.

(iv) Verwende das Ergebnis aus (iii), um $\langle x_2, t_2 | \psi, t_1 \rangle$ zu berechnen.

3. Vergleich der beiden Übergangswahrscheinlichkeiten

(v) Berechne mit dem Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen zum Zeitpunkt t_2 am Ort x_2 zu finden, wenn es zuvor als Wellenpaket entsprechend (2) präpariert wurde.

(vi) Betrachte den Grenzfall $\sigma \to 0$. Vergleiche die folgenden Größen mit den entsprechenden Ergebnissen aus Aufgabe 1:

- Übergangsamplitude,
- Wahrscheinlichkeitsdichte,
- Integral $\int \mathrm{d}x_2$ über die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Verwende für die Ergebnisse aus Aufgabe 1 normierte Ortseigenzustände $\delta(x)/\sqrt{\delta(0)}$. Beachte insbesondere, dass der Limes $\sigma \to 0$ stets erst am Ende von Rechnungen gebildet werden darf. Was fällt Dir an der berechneten Wahrscheinlichkeitsdichte im Fall $\sigma \to 0$ auf? Interpretiere das Ergebnis physikalisch, zum Beispiel im Kontext der Heisenbergschen Unschärferelation.

Bemerkung: In Teilaufgabe (v) wird ein Gauß-Integral, entsprechend Gl. (4) aus dem Skript, gelöst. Beachte, dass dieser Rechenschritt $\mathrm{Re}(a) > 0$ *erfordert. Folglich sollte der Limes* $\sigma \to 0$ *erst zum Ende der Berechnung ausgeführt werden. Mathematisch gesehen vertauscht der Limes* $\sigma \to 0$ *in* $\langle x|\psi\rangle$ *nicht mit der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit. Ähnliche mathematische Subtilitäten treten auch in Minkowski-Formulierungen von Quantenfeldtheorien auf, bei denen auftretende Regularisierungen meistens erst zum Ende einer Berechnung sinnvoll entfernt werden können.*