

Einführung in die Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik

Marc Wagner

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Wintersemester 2024/25

Literatur: [1, 2, 3, 4, 5].

1 Einleitung

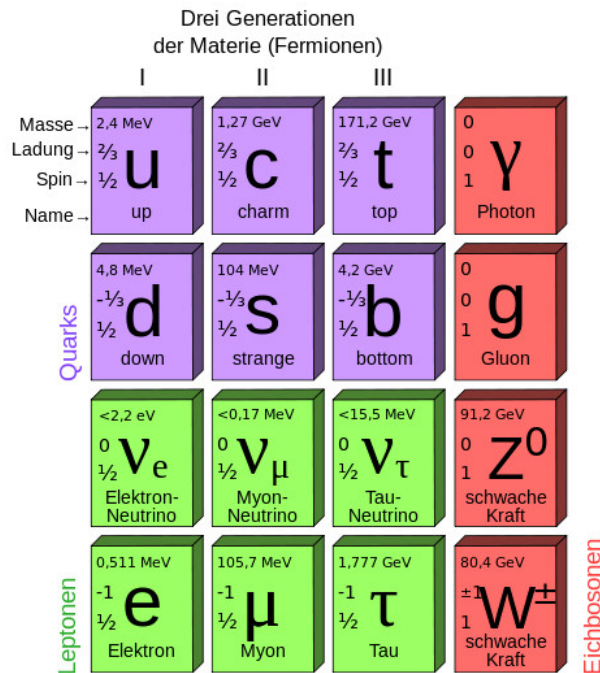
1.1 Motivation, Ziele und Inhalte der Vorlesung

- Quantenfeldtheorie (QFT):
 - Formalismus zur Beschreibung quantenmechanischer (QM) Vielteilchensysteme, insbesondere von Prozessen, bei denen Teilchen erzeugt und/oder vernichtet werden.
 - Z.B. Teilchenkollision in einem Beschleuniger:
 - * Klassische Mechanik ausreichend? ... Nein! QM Effekte zur korrekten Beschreibung elementarer Teilchen essentiell.
 - * QM ausreichend? ... Nein! Jedem Teilchen ist eine Wellenfunktion zugeordnet, können daher nicht erzeugt oder vernichtet werden.
 - * Klassische Feldtheorie ausreichend? ... Nein! Geeignet zur Beschreibung sehr vieler gleichartiger Teilchen (z.B. Photonen im Rahmen des Elektromagnetismus), nicht geeignet zur Beschreibung einzelner oder weniger Teilchen.
 - QFT erforderlich (i.d.R. relativistisch formuliert; berücksichtigt damit bei der Teilchenerzeugung/-vernichtung die Äquivalenz von Energie und Masse $E = mc^2$ bzw. $E = (m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2)^{1/2}$).
 - Anwendungen in vielen Teilgebieten der Physik: Teilchenphysik, Festkörperphysik, Optik, ...
- Teilchenphysik:
 - Beschäftigt sich mit den fundamentalen Bausteinen der Materie und deren Wechselwirkungen (WWs).
 - Damit wesentliche Unterscheidung von z.B. Festkörperphysik (Ising-Modell, ...), Strömungslehre, ...
 - “... was die Welt im Innersten zusammenhält ...” (z.B. Goethe, “Faust”).
 - Historische Entwicklung:
 - * 5. Jh. v. Chr. Demokrit:
Postuliert Atome (“unteilbare Teilchen”).
 - * 1808 Dalton:
Atomtheorie der chemischen Elemente (Gesetz der multiplen Proportionen; “Bilden zwei Elemente miteinander mehrere Verbindungen, so stehen die Massenverhältnisse, mit denen die Elemente in diesen Verbindungen auftreten, zueinander im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen.”).
 - * 1897 Thomson:
Elektron.
 - * 1919 Rutherford:
Proton.

- * 1932 Chadwick:
Neutron.
- * 1932 Anderson:
Positron (Antimaterie; theoretisch bereits 1928 von Dirac vorhergesagt).
- * 1937 Anderson, Neddermeyer:
Myon.
- * Ab \approx 1950:
Teilchenzoo ... Pionen, Kaonen, J/ψ , ...
- * 1956 Cowan, Reines:
Neutrino (theoretisch bereits 1930 von Pauli vorhergesagt).
- * 1964 Gell-Mann, Zweig:
Quarks, d.h. Substruktur von Nukleonen, etc.
- * Heute:
Hunderte von Teilchen (i.W. Hadronen = Zweier- und Dreiergruppen von Quarks, zusammengehalten von Gluonen) bekannt, alle beschrieben durch einige wenige (nach heutigem Stand des Wissens) fundamentale Teilchen und vier Ws
→ **Standardmodell der Teilchenphysik.**

- Standardmodell der Teilchenphysik:

- Materieteilchen (Abbildung 1):



http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg

Abbildung 1: Das Standardmodell der Teilchenphysik.

- * Quarks: (u, d) , (c, s) , (t, b) (drei Generationen) + Antiteilchen.

- * Leptonen: $(\nu_e, e), (\nu_\mu, \mu), (\nu_\tau, \tau)$ (drei Generationen) + Antiteilchen.
- * Antiteilchen: Gleiche Masse, gleicher Spin, entgegengesetzte Ladung ($e^- \leftrightarrow e^+, u \leftrightarrow \bar{u}$), ...

– Ws über Kraftfelder; Quantisierung liefert Austauschteilchen.

Kraft	Phänomene	Reichweite	relative Stärke	Austauschteilchen
Starke WW (QCD)	Bindet Quarks zu Nukleonen und diese zu Kernen	Sehr kurz ($\approx 10^{-15}$ m)	1	Gluonen
Elektromagnetische WW (QED)	Elektrizität, Licht, Atomkräfte, ...	unendlich	10^{-2}	Photonen
Schwache WW	Radioaktiver Zerfall	Extrem kurz ($< 10^{-15}$ m)	10^{-15}	W- und Z-Bosonen
Gravitative WW	Erdanziehung, Planetenbewegung, Kosmologie, ...	unendlich	10^{-41}	Gravitonen

- Higgs-Boson: Verantwortlich für die Massen der Materieteilchen.
- Alle anderen Teilchen, z.B. Proton, Neutron, etc. sind aus obigen zusammengesetzt.

• Der “Teilchenzoo”:

– Offizielle Liste der bekannten Teilchen: Particle Data Group (<http://pdg.lbl.gov/>).

– Klassifizierung:

- * Masse.
- * Zerfallsrate bzw. Lebensdauer.
- * Zerfallskanäle.
- * Quantenzahlen (beschreiben innere Struktur; Liste nicht vollständig):
 - Spin bzw. Gesamtdrehimpuls J (Bosonen: $J = 0, 1, 2, \dots$; Fermionen $J = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$).
 - Elektrische Ladung.
 - Parität $P = \pm 1$.
 - Ladungskonjugation $C = \pm 1$.
 - Flavor-Quantenzahlen:
 - Isospin: $I_z = +1/2$ (u), $I_z = -1/2$ (d).
 - Strangeness: $S = -1$ (s), $S = +1$ (\bar{s}).
 - Charm: $C = +1$ (c), $C = -1$ (\bar{c}).
 - Bottomness: $B' = -1$ (b), $B' = +1$ (\bar{b}).
 - Topness: $T = +1$ (t), $T = -1$ (\bar{t}).
 - Leptonenzahl $L = +1$ für $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$.
 - Baryonenzahl $B = 1/3$ für u, d, c, s, t, b .

– Hadronen (bilden sich auf Grund der starken WW):

- * Quarks treten nie isoliert auf, sondern immer in gebunden Zuständen (Hadronen)
 - Confinement.
- * Mesonen: $q\bar{q}$ -Paare.
- * Baryonen: qqq oder $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$.
- * Beispiele:
 - Pion: $\pi^+ = u\bar{d}$ ($J = 0, P = -, I = 1, I_z = +1$).
 - Proton: $p = uud$ ($J = 1/2, P = +, I = 1/2, I_z = +1/2$).
 - Neutron: $n = udd$ ($J = 1/2, P = +, I = 1/2, I_z = -1/2$).
- Ungeklärte Fragen im Zusammenhang mit dem Standardmodell:
 - Es existieren gegenwärtig keine Experimente, die Standardmodell-Vorhersagen widersprechen, aber ...
 - Keine Quantengravitation.
 - Radikal unterschiedliche Kopplungsstärken ...?
 - Ästhetik: Viele Parameter (≥ 18) ... gibt es eine fundamentalere Theorie, die diese Parameter vorhersagt?
 - Dunkle Materie ...?
 - Baryonen Asymmetrie ...?
 - ...
- Mögliche Auswege/Erweiterungen des Standardmodells:
 - Große Vereinheitlichte Theorie (größere Symmetriegruppen bei hohen Energien, die vier fundamentalen Kräfte verschmelzen zu einer einzigen Kraft).
 - Supersymmetrie (Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, jedes Boson erhält einen fermionischen Partner gleicher Masse).
 - Stringtheorie (alle Elementarteilchen besitzen die selbe Stringsstruktur, Art der Oszillation bestimmt das beobachtete “Elementarteilchen”).
 - ...

1.2 Einheiten in der Teilchenphysik

- Energie E :
 - $[E] = \text{J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{V C}$.
 - Typische Energien einzelner Teilchen: Winzige Bruchteile von J.
 - Verwende in der Teilchenphysik daher eV:
 - * 1 eV: Energiezuwachs/-verlust einer Elementarladung e nach Durchlaufen einer Potentialdifferenz von 1 V.
 - * $1 \text{ eV} = 1.602 \dots \times 10^{-19} \text{ J}$.
 - * $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$.
 - * $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$.

- Masse m , Impuls \mathbf{p} :
 - $[m] = \text{kg}$, $[\mathbf{p}] = \text{kg m/s}$ (spiegelt sich in der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung wider, $E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2$).
 - Verwende in der Teilchenphysik für Massen MeV/c^2 , für Impulse MeV/c .
 - Natürliche Einheiten: Definiere $c = 1$ ($c = 2.997 \dots \times 10^{-8} \text{ m/s}$ hat lediglich historische Gründe); damit $[m] = [\mathbf{p}] = \text{MeV}$.
- Zeit t :
 - $[t] = \text{s}$.
 - Plancksches Wirkungsquantum $\hbar = 6.582 \dots \times 10^{-16} \text{ eV s}$; stellt Verbindung zwischen Energie und Zeit her.
 - Verwende in der Teilchenphysik für Zeiten \hbar/MeV .
 - Natürliche Einheiten: Definiere $\hbar = 1$; damit $[t] = 1/\text{MeV}$.
- Länge L :
 - $[L] = \text{m}$.
 - Lichtgeschwindigkeit c stellt Verbindung zwischen Zeit und Länge her.
 - Verwende in der Teilchenphysik für Längen $\hbar c/\text{MeV}$.
 - Natürliche Einheiten: $[L] = 1/\text{MeV}$.
- Temperatur T :
 - $[T] = \text{K}$.
 - Boltzmann-Konstante $k_B = 8.617 \dots \times 10^{-5} \text{ eV K}$; stellt Verbindung zwischen Energie und Temperatur her.
 - Verwende in der Teilchenphysik für Temperaturen MeV/k_B .
 - Natürliche Einheiten: Definiere $k_B = 1$; damit $[T] = \text{MeV}$.
- In natürlichen Einheiten wird jede dimensionsbehaftete Größe in Potenzen von MeV angegeben.
- Gebräuchlich ist auch die Verwendung von fm an Stelle von MeV:
 - $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$.
 - Umrechnung zwischen fm und MeV mittels $\hbar c = 197.326 \dots \text{ MeV fm}$.
 - Damit: $[L] = [t] = \text{fm}$, $[E] = [m] = [\mathbf{p}] = [T] = 1/\text{fm}$, ...

2 Teilchen in der klassischen Mechanik und QM

2.1 Teilchen in der klassischen Mechanik

- Masse m , Position \mathbf{r} .
- Bewegung im i.d.R. zeitunabhängigen Potential $V(\mathbf{r})$.
- Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ ist Lösung der Newtonschen BGl

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Eindeutige Lösung erfordert Angabe von Anfangsbedingungen (ABs) von z.B. $\mathbf{r}(t=0)$ und $\dot{\mathbf{r}}(t=0)$.

2.1.1 Lagrange-Formalismus

- Lagrange-Funktion:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T - V = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (2)$$

(T : kinetische Energie).

- Wirkung:

$$S[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (3)$$

- Hamiltonsches Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung):

- Die physikalische Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ mit Randbedingungen $\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f$ minimiert S , also $\delta S = 0$ bei Variation der Trajektorie um $\delta \mathbf{r}(t)$.
- Variationsrechnung führt auf Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4)$$

Diese sind identisch zur Newtonschen BGl.

- Vorteil: Der Lagrange-Formalismus ist (im Gegensatz zu den Newtonschen BGls) leicht auf die Feldtheorie übertragbar, da er in offensichtlicherer Weise die Symmetrien einer Theorie widerspiegelt.

2.1.2 Hamilton-Formalismus

- Legendre-Transformation von $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ bzgl. $\dot{\mathbf{r}}$:

- Kanonisch konjugierte Impulse:

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{\partial L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{r}}}. \quad (5)$$

- Auflösen von (5) nach $\dot{\mathbf{r}}$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \mathbf{r}).$$

- Hamilton-Funktion:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \mathbf{r})) = T + V. \quad (6)$$

(in H darf kein $\dot{\mathbf{r}}$ auftreten). H entspricht der Gesamtenergie.

- Hamiltonsche BGls:

$$\dot{\mathbf{r}} = +\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (7)$$

Diese sind identisch zu den Euler-Lagrange-Gleichungen.

- Vorteil: Hamilton-Formalismus ermöglicht den direkten Übergang zur QM.

2.2 Teilchen in der QM (kanonische Quantisierung)

- Vorgehensweise:

- Ersetze klassische Observablen durch hermitesche Operatoren:

- * Ort: $\mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$.

- * Impuls: $\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}$.

- * Energie: $E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rightarrow \hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ (Hamilton-Operator).

- Operatoren sind i.A. nicht vertauschbar, d.h. erfüllen spezielle Kommutatorrelationen.

- Fordere für kanonisch konjugierte Variablen A und p_A die Kommutatorrelation

$$[\hat{A}, \hat{p}_A] = \hat{A}\hat{p}_A - \hat{p}_A\hat{A} = i, \text{ z.B. } [\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{jk}.$$

- Ersetze klassischen Zustand $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ durch QM Zustand $|\psi\rangle$.

- Eine sehr gängige Darstellung von Orts- und Impulsoperator, die die geforderten Kommutatorrelationen $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i$, $[\hat{r}_j, \hat{r}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$ erfüllt, ist die Ortsdarstellung,

$$\hat{r}_j \equiv r_j, \quad \hat{p}_j \equiv -i\frac{\partial}{\partial r_j}. \quad (8)$$

- Eine andere mögliche Darstellung ist die Impulsdarstellung,

$$\hat{r}_j \equiv +i\frac{\partial}{\partial p_j}, \quad \hat{p}_j \equiv p_j. \quad (9)$$

- Wichtiges Hilfsmittel: Eigenwerte λ_j und Eigenzustände $|\lambda_j\rangle$ eines Operators \hat{O} . Diese erfüllen

$$\hat{O}|\lambda_j\rangle = \lambda_j|\lambda_j\rangle. \quad (10)$$

Für $\hat{O} = \hat{H}$ (Hamilton-Operator) und bei Verwendung der Ortsdarstellung (8) ist dies die bekannte stationäre Schrödinger-Gleichung (SG),

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} + V(\mathbf{r})\right)\psi_j(\mathbf{r}) = E_j\psi_j(\mathbf{r}). \quad (11)$$

- Messung einer Observablen O im Zustand $|\psi\rangle$:
 - (a) Wahrscheinlichkeit für Messergebnis λ_j ist $|\langle\psi|\lambda_j\rangle|^2$.
 - (b) Erwartungswert: $\langle O \rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$ (folgt aus (a)).
 - (c) Streuung (Varianz) der Messergebnisse: $\Delta O^2 = \langle\psi|(\hat{O} - \langle O \rangle)^2|\psi\rangle$ (folgt aus (a)).
- Falls $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$:
 - Es existiert keine Basis, deren Zustände sowohl Eigenzustände von \hat{A} als auch von \hat{B} sind.
 - Es existiert eine Unschärferelation bezüglich \hat{A} und \hat{B} :

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|. \quad (12)$$

Bekanntes Beispiel ist $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$.

- Ortseigenzustände:
 - $\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{q}\rangle = \mathbf{q}|\mathbf{q}\rangle$.
 - $|\mathbf{q}\rangle$ beschreibt ein Teilchen am Ort \mathbf{q} .
 - Orthogonalität: $\langle\mathbf{q}_1|\mathbf{q}_2\rangle = \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$.
 - Vollständigkeit: $\int d^3q |\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{q}| = 1$.
 - Schrödingersche Wellenfunktion in der Ortsdarstellung: $\psi(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\psi\rangle$.
- Impulseigenzustände:
 - $\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{k}\rangle = \mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle$.
 - $|\mathbf{k}\rangle$ beschreibt Teilchen mit Impuls \mathbf{k} .
 - Orthogonalität und Vollständigkeit analog zu Ortseigenzuständen.

2.2.1 Zeitentwicklung

- Schrödinger-Bild:

- Zustände $|\psi(t)\rangle$ zeitabhängig, Operatoren \hat{O} zeitunabhängig.
- Zeitentwicklung von Zuständen durch die SG bestimmt:

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle; \quad (13)$$

Lösung ist

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}|\psi_0\rangle \quad (14)$$

bei Anfangsbedingung $|\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle$.

***** 23. Oktober 2024 (3. Vorlesung) *****

- (13) in Ortsdarstellung liefert die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho(\mathbf{r}, t) + \nabla\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (15)$$

mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$\rho = \psi^*\psi \quad (16)$$

und dem Wahrscheinlichkeitsstrom

$$\mathbf{j} = -\frac{i}{2m}(\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi). \quad (17)$$

Die Existenz einer Kontinuitätsgleichung ist essentiell, um $\psi^*\psi$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretieren zu können.

- Heisenberg-Bild (wird in der QFT häufig verwendet):

- Zustände $|\psi_H\rangle$ zeitunabhängig, Operatoren $\hat{O}_H(t)$ zeitabhängig.
- Zeitabhängiger Erwartungswert verdeutlicht Übergang zwischen Schrödinger- und Heisenberg-Bild:

$$\langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle = \underbrace{\langle\psi(t_0)|}_{=|\psi_H\rangle} \underbrace{e^{+i\hat{H}(t-t_0)}\hat{O}e^{-i\hat{H}(t-t_0)}}_{=\hat{O}_H(t)} \underbrace{|\psi(t_0)\rangle}_{=|\psi_H\rangle}. \quad (18)$$

- $\hat{O}_H(t)$ erfüllt die Heisenbergsche BGl:

$$\frac{d}{dt}\hat{O}_H(t) = i[\hat{H}, \hat{O}_H(t)]. \quad (19)$$

- Beispiel: Für $\hat{O}_H = \hat{\mathbf{r}}$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{r}} = +\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{\mathbf{p}}} \quad (20)$$

und für $\hat{O}_H = \hat{\mathbf{p}}$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{p}} = -\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{\mathbf{r}}}, \quad (21)$$

was den Hamiltonschen BGls (7) aus der klassischen Mechanik entspricht.

2.2.2 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren am Beispiel des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators

- Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{q}^2}{2}. \quad (22)$$

- Definiere

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \hat{q} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \hat{p}. \quad (23)$$

Es folgt

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \hat{q} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \hat{p} \quad (24)$$

sowie

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad \hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = +\omega \hat{a}^\dagger, \quad [\hat{H}, \hat{a}] = -\omega \hat{a}. \quad (25)$$

- Interpretation von \hat{a}^\dagger und \hat{a} als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

- Sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand von \hat{H} , d.h.

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (26)$$

- Aus

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger \hat{H} + [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] \right) |n\rangle = \left(E_n + \omega \right) \hat{a}^\dagger |n\rangle \quad (27)$$

folgt, dass \hat{a}^\dagger ein Energiequant der Größe ω erzeugt.

- Aus

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = \left(\hat{a} \hat{H} + [\hat{H}, \hat{a}] \right) |n\rangle = \left(E_n - \omega \right) \hat{a} |n\rangle; \quad (28)$$

folgt, dass \hat{a} ein Energiequant der Größe ω vernichtet.

- Probleme: (1) Unendlich große negative Energien ...? (2) Außerdem gilt

$$E_n = \langle n | \hat{H} | n \rangle = |a| \psi \rangle|^2 \omega + \omega/2 \geq \omega/2.$$

- Ausweg: Betrachte

$$\left| \hat{a} | n \rangle \right|^2 = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \langle n | \left(\frac{\hat{H}}{\omega} - \frac{1}{2} \right) | n \rangle = \frac{E_n}{\omega} - \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Für $E_n = \omega/2$ folgt $|\hat{a}|n\rangle|^2 = 0$ und damit $\hat{a}|n\rangle = 0$. Definiere den Grundzustand $|0\rangle$ als Zustand mit $E_0 = \omega/2$ (damit $\hat{a}|0\rangle = 0$, unendlich große negative Energien sind ausgeschlossen). Konstruiere alle weiteren Zustände durch Anwendung von Erzeugungsoperatoren,

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad , \quad E_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\omega \quad (30)$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = |n\rangle \quad , \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \quad (31)$$

(Normierung $1/\sqrt{n!}$ ergibt sich durch Überlegungen analog zu (29)). Dabei ergibt sich

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad , \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (32)$$

sowie

$$\underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a}}_{=\hat{N}}|n\rangle = n|n\rangle \quad (33)$$

(\hat{N} bezeichnet man als Besetzungszahloperator).

Im Folgenden werden Dächer auf Operatoren stets weggelassen.

3 Relativistische Wellen-/Feldgleichungen

3.1 Spezielle Relativitätstheorie

- Ziel: Relativistische Formulierung von QFTs (solche QFTs beschreiben z.B. das Standardmodell, QED, QCD). Daher im Folgenden eine kurze Wiederholung der speziellen Relativitätstheorie.

3.1.1 “Herleitung”, Lorentz- und Poincare-Transformationen

- Raumzeitvektor $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x})$.
- Betrachte den “Abstand” zweier Raumzeitvektoren x^μ und y^μ ,

$$s^2 = \underbrace{(x^0 - y^0)^2}_{=s^0} - \underbrace{(x^1 - y^1)^2}_{=s^1} - \underbrace{(x^2 - y^2)^2}_{=s^2} - \underbrace{(x^3 - y^3)^2}_{=s^3}. \quad (34)$$

- Sind x^μ und y^μ über ein Lichtsignal verbunden, gilt $s^2 = 0$.
- Experimente:
 - Licht breitet sich in allen Inertialsystemen mit der gleichen Geschwindigkeit aus; damit gilt für zwei Inertialsysteme Σ und Σ' $s^2 = 0 \leftrightarrow s'^2 = 0$.
 - $s^2 = s'^2$.
- Notation: Unterscheide zwischen oberen und unteren Indizes.
 - Kontravarianter Vektor: x^μ .
 - Kovarianter Vektor: $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{x})$.
 - Übergang zwischen kontra- und kovarianten Vektoren/Indizes mit Hilfe des metrischen Tensors/der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$, z.B. $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$ bzw. $x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu$, wobei $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.
 - Damit $s^2 = s^\mu \eta_{\mu\nu} s^\nu = s^\mu s_\mu$.
- Welche Koordinatentransformationen verbinden Inertialsysteme?

- Homogenität von Raum- und Zeit bedingt inhomogene lineare Transformationen, $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$.
- $s'^2 = s^2$ führt auf

$$s'^\mu \eta_{\mu\nu} s'^\nu = \Lambda^\mu_\alpha s^\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta s^\beta = s^\alpha \eta_{\alpha\beta} s^\beta. \quad (35)$$

Da s^μ beliebig sein kann, folgt

$$\underbrace{\Lambda^\mu_\alpha}_{=(\Lambda^T)_{\alpha\mu}} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (\text{Matrixform}) \quad (36)$$

(“ Λ ist also eine Art orthogonale Transformation.”). Transformationen Λ , die (36) erfüllen, werden als Lorentz-Transformationen bezeichnet.

- Klassifikation von Größen gemäß ihres Transformationsverhaltens unter Lorentz-Transformationen:

- $x' = x \rightarrow$ Skalar.
- $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} \rightarrow$ (kontravarianter) Vektor.
- $x'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\alpha\beta} \rightarrow$ (kontravarianter) Tensor (2-ter Stufe).
- $x'^{\mu\nu\rho} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} x^{\alpha\beta\gamma} \rightarrow$ (kontravarianter) Tensor 3-ter Stufe.
- ...

- Ableitungen transformieren kovariant:

- $\partial_{\mu} = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) = (\partial_t, \nabla)$.
- Es folgt $\partial^{\mu} = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$.
- D'Alembert-Operator: $\square = \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = \partial_t^2 - \Delta$.

- Spezielle Lorentz-Transformationen:

- **(1) Rotationen:**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad (37)$$

wobei R eine Rotationsmatrix ist, also $R^T R = 1$ und $\det(R) = 1$. Damit $t' = t$ und $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$.

- **(2) Boost in x -Richtung (analog in y - oder z -Richtung):**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \pm\gamma\beta & 0 & 0 \\ \pm\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = v, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (38)$$

wobei sich die beiden Inertialsysteme relativ zueinander in x -Richtung mit Geschwindigkeit v bewegen. Damit $(t', x', y', z') = (\gamma(t \pm \beta x), \gamma(x \pm \beta t), y, z)$.

- **(3) Zeitumkehr:**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

- **(4) Parität (Raumspiegelung):**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

- Jede Lorentz-Transformation lässt sich als Kombination von **(1)**, **(2)**, **(3)** und **(4)** schreiben.

– Klassifikation:

- * $\Lambda^0_0 > 0$
→ orthochrone Lorentz-Transformationen (Zeitrichtung wird nicht umgekehrt).
- * $\Lambda^0_0 \det(\Lambda) > 0$
→ orientierungstreue Lorentz-Transformationen (Raum wird nicht gespiegelt).
- * $\Lambda^0_0 > 0, \det(\Lambda) = 1$
→ eigentliche Lorentz-Transformationen (orthochron und orientierungstreu).

- Inhomogene Lorentz-Transformationen (Poincare-Transformationen): Lorentz-Transformationen + Translation, d.h.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (41)$$

- Standardmodellphysik in allen Inertialsystemen gleich, die durch eigentliche inhomogene Lorentz-Transformationen verbunden sind.

3.1.2 Energie und Impuls relativistischer Teilchen

- Weltlinie eines Teilchens in einem beliebigen Inertialsystem Σ : $x^\mu(t) = (t, \mathbf{x}(t))$.
- Im Ruhesystem Σ' des Teilchens: $dx'^\mu = (d\tau, 0)$.
- $(dx)^2 = (dx')^2$ gilt, obwohl Σ' im Allgemeinen kein Inertialsystem ist, da für eine infinitesimale Zeitspanne die Geschwindigkeit des Teilchens in Σ konstant ist. Damit kann das Teilchen zum Zeitpunkt t als in einem Inertialsystem ruhend betrachtet werden, das sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$ relativ zu Σ bewegt.
- Es folgt $d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2 = dt^2(1 - \mathbf{v}^2)$.
- Eigenzeit:

$$\tau = \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \quad (42)$$

(Zeit die im Ruhesystem Σ' des Teilchens vergangen ist, während der Zeitspanne $t_i \dots t_f$ im Inertialsystem Σ).

- Vierergeschwindigkeit:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}}_{=\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

- Viererimpuls: $p^\mu = mu^\mu$.

– $p^0 = mu^0 = m\gamma = m + m\mathbf{v}^2/2 + \mathcal{O}((\mathbf{v}^2)^2)$; legt Interpretation als Gesamtenergie nahe, also $p^0 = E$.

– $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m\mathbf{v} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^3)$; entspricht also für kleine Geschwindigkeiten dem nichtrelativistischen Impuls $m\mathbf{v}$.

• Lorentz-Invariante p^2 :

– Im Inertialsystem Σ : $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$.

– Im Ruhesystem Σ' : $p'^2 = m^2$.

– Auf Grund von $p^2 = p'^2 \quad E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$ (relativistische Energie-Impuls-Beziehung).

3.2 Die Klein-Gordon-Gleichung

• Ziel: Aufstellen einer relativistischen Version der SG.

• (Nicht-relativistische) SG:

– Starte mit der nicht-relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$.

– Korrespondenzprinzip $E \rightarrow i\partial_t$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ und Anwenden der resultierenden Operatoren auf eine Wellenfunktion ψ liefert

$$i\partial_t\psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{1}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) \right)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (44)$$

• Analoges Vorgehen im relativistischen Fall:

– Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$.

– Korrespondenzprinzip:

$$i\partial_t\phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{m^2 - \Delta}\phi(\mathbf{r}, t); \quad (45)$$

Probleme verursachen die Ableitungen Δ unter der Wurzel. Entwicklung führt zu unendlich hohen Ableitungen. Gleichung daher ungeeignet.

• Weiterer Versuch:

– Starte mit $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$.

– Korrespondenzprinzip liefert die sogenannte Klein-Gordon-Gleichung (KGG):

$$-\partial_t^2\phi(\mathbf{r}, t) = (m^2 - \Delta)\phi(\mathbf{r}, t) \quad (46)$$

bzw.

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2 \right)\phi(x) = 0; \quad (47)$$

diese Gleichung ist forminvariant unter Lorentz-Transformationen von Σ nach Σ' :

* $\partial^\mu\partial_\mu = \partial'^\mu\partial'_\mu$.

* $\phi(x) = \phi'(x')$ (das Transformationsverhalten eines Skalarfelds).

* Damit

$$\left(\partial'^\mu\partial'_\mu + m^2 \right)\phi'(x') = 0. \quad (48)$$

***** 30. Oktober 2024 (5. Vorlesung) *****

- Lösung der KGG:

– Ansatz: Ebene Welle, $\phi(x) = e^{-ikx}$,

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi(x) = \left(-k^\mu k_\mu + m^2\right)\phi(x) = 0, \quad (49)$$

also $-k^\mu k_\mu + m^2 = 0$ bzw. $-(k^0)^2 + \mathbf{k}^2 + m^2 = 0$ bzw. $k^0 = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$.

– Korrespondenzprinzip: k^0 entspricht der Energie, \mathbf{k} dem Impuls; $k^0 = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$. Die KGG erlaubt damit negative Energien ...? (1. Problem der KGG)

– Allgemeine Lösung der KGG durch lineare Superposition:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int d^3k \left(N_+(\mathbf{k}) e^{-i(+E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} + N_-(\mathbf{k}) e^{-i(-E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \right) = \\ &= \int d^3k \left(N_+(\mathbf{k}) e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} + N_-(\mathbf{k}) e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \right) = \dots \end{aligned} \quad (50)$$

mit $E(\mathbf{k}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$. Die Definition/Konvention

$$N_+(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} a(\mathbf{k}) \quad , \quad N_-(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} b^*(\mathbf{k}) \quad (51)$$

führt auf (Fortsetzung von (50))

$$\dots = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \left(a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + b^*(\mathbf{k}) e^{+ikx} \right) \quad (52)$$

(hier $k^\mu = (E(\mathbf{k}), \mathbf{k})$).

– Reelles ϕ : $b(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k})$.

– Komplexes ϕ : $a(\mathbf{k})$ und $b(\mathbf{k})$ unabhängig.

- Es existiert eine Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \nabla \mathbf{j} = 0$ bzw. $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) \quad , \quad \rho = +i(\phi^*(\partial_t \phi) - (\partial_t \phi^*)\phi) \quad , \quad \mathbf{j} = -i(\phi^*(\nabla \phi) - (\nabla \phi^*)\phi). \quad (53)$$

\mathbf{j} hat dieselbe Form wie der nicht-relativistische Wahrscheinlichkeitsstrom (17). Die Interpretation von ρ als Wahrscheinlichkeitsdichte scheidet jedoch aus, da ρ negativ sein kann (ϕ muss lediglich die KGG erfüllen, eine Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung. Dies erlaubt die beliebige Vorgabe von ABs $\phi(\mathbf{x}, t = t_i)$ und $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t = t_i)$, z.B. so, dass ρ negativ ist) ...? (2. Problem der KGG)

- Zusammenfassung: Die KGG führt zu Problemen,

- (1) negative Energien,
- (2) keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion (Ursache: KGG ist DGL 2. Ordnung),
- (3) Teilchenerzeugung/-vernichtung nicht beschreibbar (siehe Abschnitt 1.1).

- Ausblick: ϕ beschreibt nicht die Wellenfunktion eines einzelnen Teilchens sondern im Rahmen der QFT ein Feld, dessen angeregte Quanten skalaren Teilchen (z.B. das Higgs-Boson) entsprechen.

3.3 Die Dirac-Gleichung

- Ziel: Aufstellen einer relativistischen Version der SG, die eine DGL 1. Ordnung ist (in der Hoffnung, zumindest das Problem mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion zu lösen), also

$$i\partial_t\psi(x) = H\psi(x), \quad (54)$$

wobei H linear in den räumlichen Ableitungen ∂_j ist.

- Ansatz:

$$i\partial_0\psi(x) = \left(\sum_j \alpha_j(-i\partial_j) + \beta m \right) \psi(x). \quad (55)$$

- Bestimmung der Koeffizienten α_j, β :

- Ableiten mit $i\partial_0$ und Einsetzen des Ansatzes (55):

$$\begin{aligned} -\partial_0^2\psi(x) &= \left(\sum_j \alpha_j(-i\partial_j) + \beta m \right) i\partial_0\psi(x) = \\ &= \left(\sum_j \alpha_j(-i\partial_j) + \beta m \right) \left(\sum_k \alpha_k(-i\partial_k) + \beta m \right) \psi(x) = \\ &= \left(-\sum_j \alpha_j^2 \partial_j^2 + \beta^2 m^2 \right) \psi(x) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j) \partial_j \partial_k + im \sum_j (\alpha_j \beta + \beta \alpha_j) \partial_j \right) \psi(x). \end{aligned} \quad (56)$$

- Korrespondenzprinzip $i\partial_0 \rightarrow E$ und $-i\partial_j \rightarrow p^j$ führt auf

$$\begin{aligned} E^2\psi(x) &= \left(\sum_j \alpha_j^2 (p^j)^2 + \beta^2 m^2 \right) \psi(x) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j) p^j p^k + m \sum_j (\alpha_j \beta + \beta \alpha_j) p^j \right) \psi(x). \end{aligned} \quad (57)$$

Diese Gleichung sollte der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung entsprechen. Daher

$$\alpha_j^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 0 \quad \text{für } j \neq k, \quad \alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0. \quad (58)$$

Diese Bedingungen können nicht von vertauschbaren Zahlen erfüllt werden. Verwende daher Matrizen α_j und β .

- Zusätzliche Bedingung: H hermitesch, also $H = H^\dagger$, erfordert $\alpha_j = \alpha_j^\dagger$ und $\beta = \beta^\dagger$.
- Weitere Eigenschaften:

- * Auf Grund von $\alpha_j^2 = \beta^2 = 1$ sind die Eigenwerte von $\alpha_j, \beta \pm 1$.

- * $\text{Tr}(\alpha_j) = \text{Tr}(\alpha_j \beta^2) = \text{Tr}(\underbrace{\beta \alpha_j}_= -\alpha_j \beta) = -\text{Tr}(\alpha_j)$, also $\text{Tr}(\alpha_j) = 0$.

* Analog $\text{Tr}(\beta) = 0$.

* Tr = Summe der Eigenwerte, daher gerade Dimension von α_j, β .

– Mit 2×2 -Matrizen sind obige Bedingungen nicht zu erfüllen, aber mit 4×4 -Matrizen

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_j \\ +\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Die Wahl (59) (“Standarddarstellung”) ist nicht eindeutig.

- Die Gleichung (55) mit den Matrizen (59) wird als Dirac-Gleichung (DG) bezeichnet. ψ hat vier Komponenten, ist aber kein Vierervektor, sondern ein “(Dirac-)Spinor” (anderes spezielles Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen).

***** 01. November 2024 (6. Vorlesung) *****

- Kovariante Form der DG:

– Definition:

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^j = \beta\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

– Eigenschaften der γ -Matrizen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger, \quad \gamma^j = -(\gamma^j)^\dagger. \quad (62)$$

– Multiplikation von (55) mit β führt auf

$$i\beta\partial_0\psi(x) = \left(\sum_j \beta\alpha_j(-i\partial_j) + m \right)\psi(x) \quad (63)$$

bzw.

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m \right)\psi(x) = 0 \quad (64)$$

(die γ -Matrizen verändern sich nicht bei Lorentz-Transformation, auch wenn sie einen Viererindex tragen; mehr dazu in Abschnitt 3.3.5).

- Lösung der DG:

– Die DG enthält die KGG, d.h. ein Spinor ψ der die DG erfüllt, muss auch die KGG erfüllen (die DG wurde so konstruiert; siehe (56) und (58)).

– Benutze daher den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{k}) \\ \chi(\mathbf{k}) \end{pmatrix} e^{\mp i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})}, \quad E(\mathbf{k}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} \quad (65)$$

(für Vorzeichen $e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})}$ entspricht das positive $E(\mathbf{k})$ dem Betrag der negativen Energie und \mathbf{k} entspricht dem negativen Impuls, d.h. Impuls $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$ [Korrespondenzprinzip]).

– Einsetzen des Ansatzes in die DG (64) führt auf

$$(E(\mathbf{k}) \mp m)\varphi(\mathbf{k}) - \vec{\sigma}\mathbf{k}\chi(\mathbf{k}) = 0 \quad (66)$$

$$(E(\mathbf{k}) \pm m)\chi(\mathbf{k}) - \vec{\sigma}\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}) = 0. \quad (67)$$

– Obere Vorzeichen, $\psi \propto e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})}$, d.h. positive Energie:

* Umstellen von (67):

$$\chi(\mathbf{k}) = \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k}) + m}\varphi(\mathbf{k}). \quad (68)$$

* Einsetzen in (66):

$$\underbrace{\left(E(\mathbf{k}) - m - \frac{(\vec{\sigma}\mathbf{k})^2}{E(\mathbf{k}) + m}\right)}_{=0}\varphi(\mathbf{k}) = 0, \quad (69)$$

wobei $(\vec{\sigma}\mathbf{k})^2 = \mathbf{k}^2 = E(\mathbf{k})^2 - m^2 = (E(\mathbf{k}) + m)(E(\mathbf{k}) - m)$ verwendet wurde, d.h. jedes beliebige φ ist möglich, also zwei linear unabhängige Lösungen $\varphi_1 = N(1, 0)$ und $\varphi_2 = N(0, 1)$ (Hinweis auf “Spin up” und “Spin down”; mehr dazu in Abschnitt 3.3.2).

* Spinoren mit positiver Energie:

$$\psi_{1,2}^+(x) = u_{1,2}(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \quad (70)$$

$$u_1(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{k}) \\ \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k})+m}\varphi_1(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{+k^3}{E(\mathbf{k})+m} \\ \frac{+k^1+ik^2}{E(\mathbf{k})+m} \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$u_2(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \varphi_2(\mathbf{k}) \\ \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k})+m}\varphi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{+k^1-ik^2}{E(\mathbf{k})+m} \\ \frac{-k^3}{E(\mathbf{k})+m} \end{pmatrix}. \quad (72)$$

– Untere Vorzeichen, $\psi \propto e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})}$, d.h. negative Energie:

* Umstellen von (66):

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k}) + m}\chi(\mathbf{k}). \quad (73)$$

* Einsetzen in (67):

$$\underbrace{\left(E(\mathbf{k}) - m - \frac{(\vec{\sigma}\mathbf{k})^2}{E(\mathbf{k}) + m}\right)}_{=0}\chi(\mathbf{k}) = 0, \quad (74)$$

d.h. jedes beliebige χ ist möglich, also zwei linear unabhängige Lösungen $\chi_1 = N(0, 1)$ und $\chi_2 = N(1, 0)$.

* Spinoren mit negativer Energie:

$$\psi_{1,2}^-(x) = v_{1,2}(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \quad (75)$$

$$v_1(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k})+m}\chi_1(\mathbf{k}) \\ \chi_1(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{+k^1-ik^2}{E(\mathbf{k})+m} \\ \frac{-k^3}{E(\mathbf{k})+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$v_2(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{E(\mathbf{k})+m}\chi_2(\mathbf{k}) \\ \chi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{+k^3}{E(\mathbf{k})+m} \\ \frac{+k^1+ik^2}{E(\mathbf{k})+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

- Normierung $N = \sqrt{E(\mathbf{k}) + m}$ (Konvention). Damit $u_r^\dagger(\mathbf{k})u_s(\mathbf{k}) = 2E(\mathbf{k})\delta_{rs}$ und $v_r^\dagger(\mathbf{k})v_s(\mathbf{k}) = 2E(\mathbf{k})\delta_{rs}$.
- Für kleine Impulse $|\mathbf{k}| \ll E(\mathbf{k})$ (nicht- bzw. schwach relativistischer Bereich) dominieren für positive Energien die oberen beiden Komponenten, für negative Energien die unteren beiden Komponenten.
- Allgemeine Lösung der DG durch lineare Superposition:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{r=1,2} \left(b_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + d_r^*(\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{+ikx} \right) \quad (78)$$

(hier $k^\mu = (E(\mathbf{k}), \mathbf{k})$).

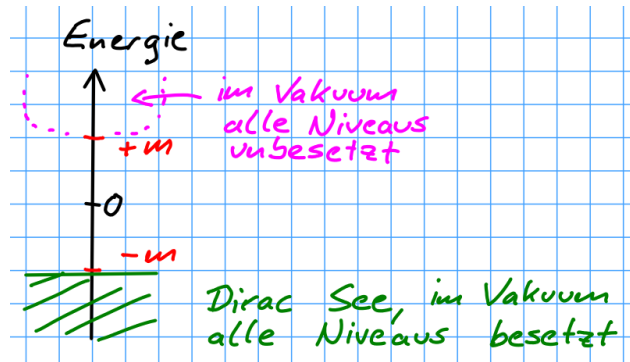
- Es existiert eine Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \nabla \mathbf{j} = 0$ bzw. $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, wobei $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ (adjungierter Spinor). Da $\rho = j^0 = \psi^\dagger \psi \geq 0$ ist eine Interpretation von ρ als Wahrscheinlichkeitsdichte denkbar, d.h. die DG ist diesbezüglich der KG überlegen.
- Ausblick: ψ beschreibt nicht die Wellenfunktion eines einzelnen Teilchens sondern im Rahmen der QFT ein Feld, dessen angeregte Quanten fermionischen Spin-1/2-Teilchen (z.B. Elektronen, Quarks) entsprechen.

3.3.1 Lösungen mit negativer Energie

- Teilchen mit beliebig großen negativen Energien $-E(\mathbf{k}) = -\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ können nicht existieren (Energiegewinn durch “Abrutschen” zu immer negativeren Energien).
- Ignorieren/Wegwerfen der Lösungen mit negativer Energie? ... Fragwürdig! Schlechte Theorie!

Ausweg (1): Dirac-See.

- Pauli-Prinzip: Zwei gleichartige Fermionen (z.B. Elektronen) können nicht im selben Zustand sein.
- Vakuum: Alle negativen Energieniveaus sind besetzt, alle positiven unbesetzt.



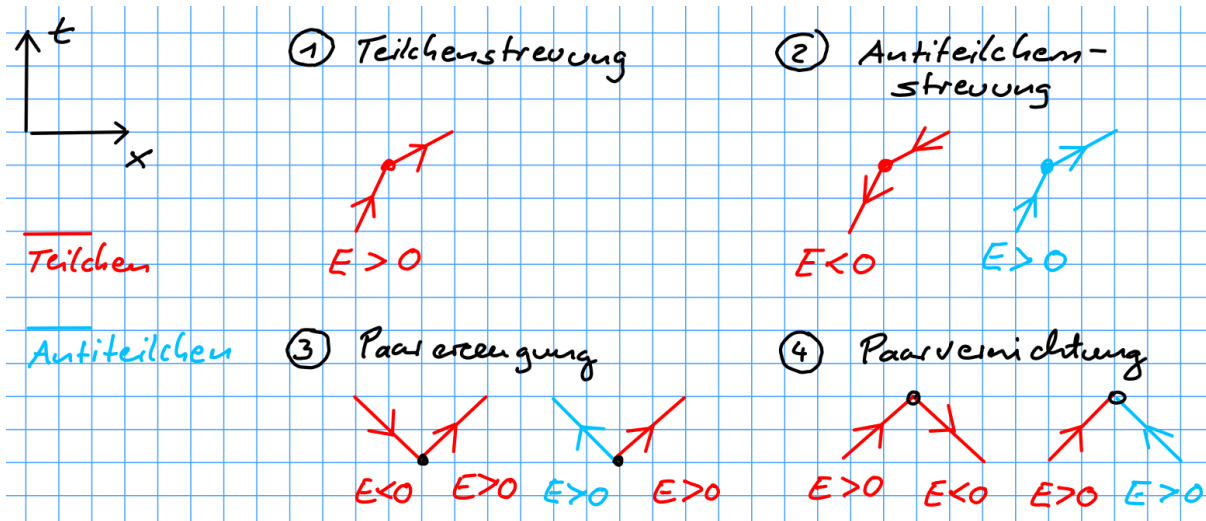
- Einzelnes Elektron mit Impuls \mathbf{k} : Energieniveau $E(\mathbf{k}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ ist zusätzlich besetzt.
- Elektron-Positron-Paarerzeugung: Ein Elektron mit negativer Energie wird auf ein positives Energieniveau gehoben (dafür minimal notwendige Energie: $2m$); das entstandene Loch entspricht einer fehlenden Ladung und verhält sich daher wie ein Positron.
→ **Vorhersage von Antiteilchen.**
- Betrachtungsweise in der Festkörpertheorie erfolgreich, scheidet jedoch für Bosonen.

Ausweg (2): Feynman-Stückelberg-Interpretation.

- Literatur: [6], Kapitel 3.1.
- Wesentliche Idee: Teilchen mit negativer Energie laufen rückwärts in der Zeit, entsprechen Antiteilchen, die vorwärts in der Zeit laufen und positive Energie haben:
 - Teilchen mit negativer Energie:

$$\psi_{1,2}(x) = v_{1,2}(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})}.$$
 - Umkehren der Zeitrichtung durch $t \rightarrow -t$:

$$\psi_{1,2}(x) = v_{1,2}(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})(-t) - \mathbf{k}\mathbf{x})} = v_{1,2}(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t + \mathbf{k}\mathbf{x})};$$
 Energie damit positiv.
- Damit können vier scheinbar unterschiedliche Prozesse (Teilchen-Streuung, Antiteilchen-Streuung, Paarerzeugung und Paarvernichtung) als ein Phänomen verstanden werden.



- Vorteil gegenüber dem Dirac-See: Auch auf Bosonen anwendbar, z.B. Pionen π^+ , π^- .
- Problem negativer Energien also nicht nur für die DG, sondern auch für die KGG gelöst.

3.3.2 Spin

- Die DG beschreibt ein freies Teilchen, also ein rotationsinvariantes System. Bei solchen Systemen ist der Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} (Summe aus Bahndrehimpulsen und Spins) erhalten.
- Die Verwendung der Pauli-Matrizen als Bausteine der γ -Matrizen und die Existenz von jeweils zwei Lösungen mit gleichem Impuls sowohl für Teilchen/Antiteilchen legt nahe, dass die DG Teilchen mit Spin beschreibt.
- Erwartung: Der Bahndrehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist keine Erhaltungsgröße,

$$[\mathbf{L}, H] = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}, \vec{\alpha}\mathbf{p} + \beta m] = [\mathbf{r}, \vec{\alpha}\mathbf{p}] \times \mathbf{p} = i\vec{\alpha} \times \mathbf{p}. \quad (79)$$

Erwartung damit bestätigt.

- Gesucht: Spinoperator \mathbf{S} . Dieser muss

$$[\mathbf{J}, H] = 0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (80)$$

erfüllen.

***** 6. November 2024 (7. Vorlesung) *****

- Drehimpulse und Spins erfüllen die Drehimpulsalgebra, z.B. $[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl}S_l$. Diese wird auch von den Pauli-Matrizen erfüllt, $[\sigma_j/2, \sigma_k/2] = i\epsilon_{jkl}\sigma_l/2$.

- Versuch:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \quad , \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha} = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\vec{\gamma}. \quad (81)$$

Es folgt

$$[S_j, H] = \frac{1}{2}[\Sigma_j, \vec{\alpha}\mathbf{p} + \beta m] = \frac{1}{2}[\Sigma_j, \alpha_k]p^k = i\epsilon_{jkl}p^k\alpha_l = -i(\vec{\alpha} \times \mathbf{p})_j, \quad (82)$$

wobei $[\Sigma_j, \alpha_k] = 2i\epsilon_{jkl}\alpha_l$ und $[\Sigma_j, \beta] = 0$ verwendet wurde. (80) ist erfüllt, \mathbf{S} scheint damit der Spinoperator zu sein.

- Eigenwerte s_j von S_j sind $\pm 1/2$ (Eigenwerte der Pauli-Matrizen sind ± 1). Eigenwerte $s(s+1)$ von

$$\mathbf{S}^2 = \frac{1}{4}\vec{\Sigma}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

sind $3/4$, damit $s = 1/2$. Die DG beschreibt also Fermionen mit Spin $1/2$.

- Spineinstellung der Lösungen der DG:

- (82) zeigt, dass die Spinkomponente parallel zum Impuls erhalten ist. Wähle daher o.B.d.A. $\mathbf{p} = (0, 0, p^3)$ und betrachte S_3 .
- Teilchen (siehe (70)):

$$S_3\psi_1^+(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{+k^3}{E(\mathbf{k})+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{k}\mathbf{x})} = +\frac{1}{2}\psi_1^+(x) \quad (84)$$

$$S_3\psi_2^+(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-k^3}{E(\mathbf{k})+m} \end{pmatrix} e^{-i(E(\mathbf{k})t-\mathbf{k}\mathbf{x})} = -\frac{1}{2}\psi_2^+(x). \quad (85)$$

- Antiteilchen (siehe (75)) analog,

$$S_3\psi_1^-(x) = -\frac{1}{2}\psi_1^-(x) \quad , \quad S_3\psi_2^-(x) = +\frac{1}{2}\psi_2^-(x). \quad (86)$$

3.3.3 Lorentz-Kovarianz der DG, Transformationsverhalten von Spinoren unter Lorentz-Transformationen

- Als relativistische Gleichung muss die DG forminvariant unter Lorentz-Transformationen sein, d.h. in jedem Inertialsystem gleich aussehen. Die beiden Gleichungen

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x) = 0 \quad , \quad \left(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m\right)\psi'(x') = 0 \quad (87)$$

müssen also die gleiche Information beinhalten, d.h. durch Lorentz-Transformation ineinander überführbar sein. Dies legt das Transformationsverhalten von Spinoren unter Lorentz-Transformationen fest.

- $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$.
- Spinoren müssen auf Grund der Linearität der DG linear transformieren, d.h.
 $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$.
- Gesucht: Die im Spin-Raum wirkende 4×4 -Matrix $S(\Lambda)$.

– Rechte Gleichung in (87):

$$0 = \left(i\gamma^\nu \partial'_\nu - m\right)\psi'(x') = \left(i\gamma^\nu \partial'_\nu - m\right)S(\Lambda)\psi(x). \quad (88)$$

– Linke Gleichung in (87):

$$0 = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) = \left(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m\right)\psi(x), \quad (89)$$

wobei $\partial_\mu = (\partial x'^\nu / \partial x^\mu) \partial'_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$ verwendet wurde. Multipliziere mit $S(\Lambda)$ (um “Rechte Gleichung” und “Linke Gleichung” vergleichen zu können),

$$\begin{aligned} 0 &= S(\Lambda) \left(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m\right) S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda)\psi(x) = \\ &= \left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu - m\right) S(\Lambda)\psi(x). \end{aligned} \quad (90)$$

– Vergleich von (88) und (90) ergibt die Bestimmungsgleichung für $S(\Lambda)$,

$$\gamma^\nu = S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu. \quad (91)$$

– Für infinitesimale Lorentz-Transformationen, $\Lambda^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$ mit $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$, ergibt sich

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad , \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]; \quad (92)$$

endliche Lorentz-Transformationen können aus infinitesimalen zusammengesetzt werden,

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \quad (93)$$

$$(\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + x/N)^N = e^x).$$

- Analoges Vorgehen zeigt, dass sich die Lösungen der KGG unter Lorentz-Transformation nicht verändern, also sogenannte Lorentz-Skalare sind:

– Die beiden Gleichungen

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi(x) = 0 \quad , \quad \left(\partial'^\mu \partial'_\mu + m^2\right)\phi'(x') = 0 \quad (94)$$

müssen die gleiche Information beinhalten, d.h. durch Lorentz-Transformation ineinander überführbar sein.

– Rechte Gleichung in (94):

$$0 = \left(\partial'^\mu \partial'_\mu + m^2\right)\phi'(x') = \left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi'(x'). \quad (95)$$

– Vergleich der linken Gleichung in (94) und (95) ergibt $\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$.

3.3.4 Transformationsverhalten von Spinoren unter Parität und Ladungskonjugation

Parität P :

- Parität entspricht der speziellen Lorentz-Transformation (40).
- Die entsprechende Spinortransformationsmatrix $S(\Lambda)$ muss (91) erfüllen:

$$\nu = 0 \quad \rightarrow_P \quad \gamma^0 = +S(\Lambda)\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \quad (96)$$

$$\nu = j \quad \rightarrow_P \quad \gamma^j = -S(\Lambda)\gamma^j S^{-1}(\Lambda); \quad (97)$$

dies führt auf $S(\Lambda) = e^{i\alpha}\gamma^0$, wobei $e^{i\alpha}$ eine beliebige Phase ist (häufig, wie auch im Folgenden, wird $e^{i\alpha} = 1$ gewählt).

- Damit transformieren sich Spinoren unter Parität gemäß

$$\psi(x) \rightarrow_P \psi'(x') = \gamma^0 \psi(x). \quad (98)$$

***** 8. November 2024 (8. Vorlesung) *****

Ladungskonjugation C :

- Als Ladungskonjugation bezeichnet man den Übergang zwischen Teilchen und Antiteilchen.
- Die Spinoren für Teilchen (70) und Antiteilchen (75) gehen (bis auf irrelevante Phasenfaktoren) durch Komplexkonjugation und Anwenden der Matrix $e^{i\alpha}\gamma^2$ ineinander über (häufig, wie auch im Folgenden, wird $e^{i\alpha} = i$ gewählt),

$$u_1(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \rightarrow_C i\gamma^2 \left(u_1(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \right)^* = +v_1(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \quad (99)$$

$$u_2(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \rightarrow_C i\gamma^2 \left(u_2(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \right)^* = -v_2(\mathbf{k})e^{+i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{x})} \quad (100)$$

bzw. allgemein

$$\psi(x) \rightarrow_C \psi'(x) = i\gamma^2 \psi^*(x). \quad (101)$$

- Bestätigung der Transformation (101) als Ladungskonjugation durch Betrachten der DG für ein Teilchen im elektromagnetischen (em) Feld:
 - Einführen des em Felds durch minimale Substitution (wie in der nicht-relativistischen QM): $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$ bzw. $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$ ergibt

$$\left(i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m \right) \psi(x) = 0. \quad (102)$$

- Erwartung: Erfüllt ein Spinor ψ die DG (102) erfüllt der ladungskonjugierte Spinor $i\gamma^2\psi^*$ ebenfalls (102) mit $e \rightarrow -e$,

$$\begin{aligned}
& \left(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m \right) i\gamma^2\psi^*(x) = \\
& = -\gamma^2\gamma^2 \left(\left(-i(\gamma^\mu)^*(\partial_\mu - ieA_\mu) - m \right) (-i)(\gamma^2)^*\psi(x) \right)^* = \\
& = -i\gamma^2 \left(\left(-i \underbrace{(-\gamma^2(\gamma^\mu)^*\gamma^2)}_{=-\gamma^\mu} (\partial_\mu - ieA_\mu) - \underbrace{(-\gamma^2\gamma^2)}_{=1} m \right) \psi(x) \right)^* = \\
& = -i\gamma^2 \left(\underbrace{\left(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m \right) \psi(x)}_{=0} \right)^* = 0, \tag{103}
\end{aligned}$$

wobei $(\gamma^{0,1,3})^* = +\gamma^{0,1,3}$ und $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$ verwendet wurde. Erwartung damit bestätigt.

3.3.5 Bilineare Kovarianten

- Zwei Spin-1/2-Teilchen lassen sich durch geeignete Linearkombination zu Gesamtspin $S = 0$ und $S = 1$ koppeln (Clebsch-Gordan-Kopplung):
 - $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} \rightarrow S = 0$ (Singlet).
 - $|\uparrow\uparrow\rangle, (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}, |\downarrow\downarrow\rangle \rightarrow S = 1$ (Triplet).
- Der Singlet-Zustand ist rotationsinvariant.
- Die drei Triplet-Zustände transformieren (nach erneuter geeigneter Linearkombination) unter Rotationen wie die drei Komponenten des Ortsvektors (x, y, z) (Analogie: Die Kugelflächenfunktionen $Y_{1,m}$, die Bahndrehimpuls $L = 1$ entsprechen, sind in kartesischen Koordinaten proportional zu $x + iy, z, x - iy$).
- Ziel/Fragestellung dieses Abschnitts: Welche Linearkombinationen zweier Spinoren $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ transformieren wie Skalare (“entsprechen Gesamtspin $S = 0$ ”), welche wie Vektoren (“entsprechen Gesamtspin $S = 1$ ”).
- Starte mit der infinitesimalen eigentlichen Lorentz-Transformation eines Spinors (92). Es folgt

$$S(\Lambda) = 1 + \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{104}$$

$$S^\dagger(\Lambda) = 1 + \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\nu^\dagger, \gamma_\mu^\dagger] = 1 - \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\mu^\dagger, \gamma_\nu^\dagger] \tag{105}$$

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = 1 - \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\nu^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0, \gamma^0 \gamma_\nu^\dagger \gamma^0] = 1 - \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = S^{-1}(\Lambda). \tag{106}$$

- Adjungierter Spinor: $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Dieser transformiert unter Lorentz-Transformation gemäß

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' & = \psi'^\dagger \gamma^0 = (S(\Lambda)\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \underbrace{\psi^\dagger \gamma^0}_{=\bar{\psi}} \underbrace{\gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0}_{=S^{-1}(\Lambda)} = \\
& = \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda). \tag{107}
\end{aligned}$$

- Damit ist $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)}$ offensichtlich ein Lorentz-Skalar, d.h.

$$\bar{\psi}^{(1)}(x)\psi^{(2)}(x) \rightarrow \bar{\psi}^{(1)'}(x')\psi^{(2)'}(x') = \bar{\psi}^{(1)}(x)\psi^{(2)}(x) \quad (108)$$

(im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird das Raumzeitargument der Spinoren weglassen).

- Definition von γ^5 :

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Es folgen die Beziehungen $(\gamma^5)^2 = 1$, $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$, $\gamma^5 = (\gamma^5)^\dagger$.

- Damit ist $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)}$ ebenfalls Lorentz-invariant, denn

$$\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)} \rightarrow \bar{\psi}^{(1)'}\gamma^5\psi^{(2)'} = \bar{\psi}^{(1)}S^{-1}(\Lambda)\underbrace{\gamma^5 S(\Lambda)}_{=S(\Lambda)\gamma^5}\psi^{(2)} = \bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)}. \quad (110)$$

- Beachte das unterschiedliche Transformationsverhalten von $\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)}$ und $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)}$ unter Parität:

$$\begin{aligned} - \bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\psi^{(2)'} = \bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\psi^{(2)} = +\bar{\psi}^{(1)}\psi^{(2)} \text{ ("Skalar")}. \\ - \bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\gamma^5\psi^{(2)'} = \bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\gamma^5\psi^{(2)} = -\bar{\psi}^{(1)}\gamma^5\psi^{(2)} \text{ ("Pseudoskalar")}. \end{aligned}$$

- (91) ist äquivalent zu

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \quad (111)$$

Damit folgt

$$\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\mu\psi^{(2)} \rightarrow \bar{\psi}^{(1)'}\gamma^\mu\psi^{(2)'} = \bar{\psi}^{(1)}\underbrace{S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)}_{=\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu}\psi^{(2)} = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\nu\psi^{(2)}, \quad (112)$$

d.h. $\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\mu\psi^{(2)}$ transformiert unter Lorentz-Transformation wie ein Vierervektor. Unter Parität

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\gamma^0\psi^{(2)'} = +\bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\psi^{(2)} \\ \bar{\psi}^{(1)}\gamma^j\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\gamma^j\psi^{(2)'} = -\bar{\psi}^{(1)}\gamma^j\psi^{(2)} \text{ ("Vektor")}. \end{aligned}$$

- Mit analogen Überlegungen erhält man

$$\begin{aligned} - \bar{\psi}^{(1)}\gamma^\mu\gamma^5\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\gamma^\mu\gamma^5\psi^{(2)'} = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}^{(1)}\gamma^\nu\gamma^5\psi^{(2)} \\ \bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\gamma^5\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\gamma^0\gamma^5\psi^{(2)'} = -\bar{\psi}^{(1)}\gamma^0\gamma^5\psi^{(2)} \\ \bar{\psi}^{(1)}\gamma^j\gamma^5\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\gamma^j\gamma^5\psi^{(2)'} = +\bar{\psi}^{(1)}\gamma^j\gamma^5\psi^{(2)} \text{ ("Pseudovektor")}. \\ - \bar{\psi}^{(1)}\sigma^{\mu\nu}\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\sigma^{\mu\nu}\psi^{(2)'} = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{\alpha\beta}\psi^{(2)} \\ \bar{\psi}^{(1)}\sigma^{0j}\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\sigma^{0j}\psi^{(2)'} = -\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{0j}\psi^{(2)} \\ \bar{\psi}^{(1)}\sigma^{jk}\psi^{(2)} &\rightarrow_P \bar{\psi}^{(1)'}\sigma^{jk}\psi^{(2)'} = +\bar{\psi}^{(1)}\sigma^{jk}\psi^{(2)} \text{ ("antisymmetrischer Tensor");} \\ \sigma^{\mu\nu} &= i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2 \text{ [siehe (92)].} \end{aligned}$$

- Die sechzehn Matrizen $1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5$ und $\sigma^{\mu\nu}$ sind linear unabhängig und bilden eine häufig gewählte Basis der 4×4 -Matrizen im Spin-Raum. Jede beliebige Bilinearkombination von $\bar{\psi}^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ lässt sich damit als Linearkombination der oben diskutierten sechzehn bilinearen Kovarianten schreiben. Damit lässt sich einfach das Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformation und Parität ablesen und z.B. der Gesamtspin angeben (wie in der Einleitung dieses Abschnitts angedeutet).

***** 14. November 2012 (9. Vorlesung) *****

- An Stelle eines adjungierten (d.h. komplex konjugierten) Spinors $\bar{\psi}$ (später in der QFT ein “Antiteilchen”) kann auch $i\psi^T\gamma^2\gamma^0$ (später in der QFT ein “Teilchen”) verwendet werden (der ladungskonjugierte adjungierte Spinor, d.h. $\bar{\psi} \rightarrow_C i\psi^T\gamma^2\gamma^0$; siehe (101)), da dieser das gleiche Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformation besitzt:

$$i\psi^T\gamma^2\gamma^0 \rightarrow i\psi'^T\gamma^2\gamma^0 = i\psi^T\gamma^2\gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \quad (113)$$

(Rechnung analog zu (104) bis (107) liefert erst $-\gamma^0\gamma^2 S^T(\Lambda)\gamma^2\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$ und dann (113)). Beachte jedoch das unterschiedliche Transformationsverhalten von $\bar{\psi}$ und $i\psi^T\gamma^2\gamma^0$ unter Parität:

$$\begin{aligned} - \bar{\psi} &\rightarrow_P \bar{\psi}' = \bar{\psi}\gamma^0. \\ - i\psi^T\gamma^2\gamma^0 &\rightarrow_P i\psi'^T\gamma^2\gamma^0 = -(i\psi^T\gamma^2\gamma^0)\gamma^0. \end{aligned}$$

- Beispiele:
 - Betrachte im Folgenden Quarks, Notation u, d an Stelle von $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$.
 - $\bar{d}\gamma^5 u$ ist ein Pseudoskalar, hat also $S = 0$ und $P = -$; kann die Wellenfunktion des Pions π^+ beschreiben [7].
 - $\underbrace{(1 + \gamma^0)}_{S=1/2, P=+} u \underbrace{(u^T\gamma^2\gamma^0\gamma^5 d)}_{S=0, P=+}$ hat also $S = 1/2$ und $P = +$; kann die Wellenfunktion des Protons beschreiben [7].

3.4 Die Weyl-Gleichung

- Betrachte die DG im Spezialfall $m = 0$:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = 0 \quad (114)$$

ist mit $\psi(x) = (\varphi(x), \chi(x))$ äquivalent zu

$$+i\partial_0\varphi(x) + i\sigma_j\partial_j\chi(x) = 0 \quad (115)$$

$$-i\partial_0\chi(x) - i\sigma_j\partial_j\varphi(x) = 0. \quad (116)$$

Linearkombination $\phi_R(x) = \varphi(x) + \chi(x)$ und $\phi_L(x) = \varphi(x) - \chi(x)$ entkoppelt die masselose DG in zwei unabhängige Gleichungen,

$$(i\partial_0 + i\sigma_j\partial_j)\phi_R(x) = 0 \quad (117)$$

$$(i\partial_0 - i\sigma_j\partial_j)\phi_L(x) = 0, \quad (118)$$

die jeweils als Weyl-Gleichung (WG) bezeichnet werden. Die zugehörigen zweikomponentigen Spinoren ϕ_R und ϕ_L heißen Weyl-Spinoren.

- Während massive Spin-1/2-Fermionen durch vierkomponentige Dirac-Spinoren und die DG beschrieben werden, ist für masselose Spin-1/2-Fermionen entweder ein rechts- oder ein linkshändiger zweikomponentiger Weyl-Spinor ϕ_R bzw. ϕ_L ausreichend.
- Lösung der rechtshändigen WG:

– Ansatz $\phi_R(x) = (\phi_1(\mathbf{k}), \phi_2(\mathbf{k}))e^{\mp iE(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ mit $E(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2} = |\mathbf{k}|$ liefert

$$\left(\pm |\mathbf{k}| - \vec{\sigma}\mathbf{k} \right) \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = 0. \quad (119)$$

– O.B.d.A. $\mathbf{k} = (0, 0, k^3)$ mit $k^3 > 0$ (also Bewegung in positiver z -Richtung). Damit

$$\left(\pm k^3 - \sigma_3 k^3 \right) \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = 0; \quad (120)$$

damit $(\phi_1(\mathbf{k}), \phi_2(\mathbf{k})) = (1, 0)$ für “positive Energie” ($e^{-iE(\mathbf{k})t}$) und $(\phi_1(\mathbf{k}), \phi_2(\mathbf{k})) = (0, 1)$ für “negative Energie” ($e^{+iE(\mathbf{k})t}$).

– Umschreiben von (119):

$$\frac{\vec{\sigma}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{k}) \\ \phi_2(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \quad (121)$$

$h = \vec{\sigma}\mathbf{k}/2|\mathbf{k}|$, die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung, wird als Helizität bezeichnet (tritt bei masselosen Teilchen an Stelle des Spins [mechanische Analogie: ein rotierendes Objekt, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, wird unendlich stark längenkontrahiert, seine Rotationsachse kann daher nur parallel oder antiparallel zur Bewegungsrichtung sein]). Spin-1/2-Teilchen (positive Energie), die durch die rechtshändige Weyl-Gleichung beschrieben werden, haben positive Helizität $h = +1/2$, Spin-1/2-Antiteilchen (negative Energie), die durch die rechtshändige Weyl-Gleichung beschrieben werden, haben negative Helizität $h = -1/2$.

- Lösung der linkshändigen WG analog.
- Parität: $\partial_j \rightarrow -\partial_j$, damit geht die rechtshändige WG (117) in die linkshändige WG (118) über und umgekehrt. Eine Paritätsverletzung tritt damit auf, wenn rechts- und linkshändige Weyl-Spinoren in unterschiedlicher Art und Weise in einer Theorie auftreten (z.B. Neutrinos im Standardmodell).

3.5 Die Maxwell-Gleichungen

- Maxwell-Gleichungen (MGs):

– Inhomogene Gleichungen:

$$\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (122)$$

mit der elektrischen Ladungsdichte ρ und der elektrischen Stromdichte \mathbf{j} .

- Homogene Gleichungen:

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (123)$$

Definiere dabei die elektrische Feldkonstante $\epsilon_0 = 1$. Damit magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2 = 1$. folglich $[\mathbf{E}] = [\mathbf{B}] = \text{MeV}^2$ bzw. $[\mathbf{E}] = [\mathbf{B}] = 1/\text{fm}^2$ (natürliche Einheiten; siehe Abschnitt 1.2).

- Kovariante Form der MGs:

- Verwende Vektorpotential $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ an Stelle von \mathbf{E} und \mathbf{B} :

$$\mathbf{E}(x) = -\partial_t \mathbf{A}(x) - \nabla \phi(x) \quad , \quad \mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x). \quad (124)$$

- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Damit $E_j = F^{j0}$ und $B_j = -\epsilon_{jkl} F^{kl}/2$ bzw.

$$F^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

- Mit $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ ist (122) äquivalent zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) \quad (126)$$

und (123) äquivalent zu

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}(x) = 0 \quad (127)$$

($\epsilon^{0123} = +1$).

- Die homogenen MGs (127) werden bei Verwendung von Vektorpotentialen automatisch erfüllt:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}(x) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu (\partial_\rho A_\sigma(x) - \partial_\sigma A_\rho(x)) = 0. \quad (128)$$

- Eichfreiheit:

- Die Beziehung zwischen A^μ und \mathbf{E} , \mathbf{B} (124) ist nicht eindeutig. Eine gegebene em Feldkonfiguration \mathbf{E} , \mathbf{B} wird durch unendlich viele verschiedene A^μ beschrieben.
- Messbar, d.h. von direkter physikalischer Bedeutung sind \mathbf{E} , \mathbf{B} (z.B. über die auf eine Testladung q ausgeübte Kraft $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$). A_μ enthält daher unphysikalische Freiheitsgrade (FHGs), sogenannte Eichfreiheitsgrade.
- Eichtransformation:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu f(x). \quad (129)$$

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ (und damit \mathbf{E} , \mathbf{B}) verändert sich dabei nicht:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}(x) &\rightarrow F'^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A'^\nu(x) - \partial^\nu A'^\mu(x) = \\ &= \partial^\mu (A^\nu(x) - \partial^\nu f(x)) - \partial^\nu (A^\mu(x) - \partial^\mu f(x)) = F^{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (130)$$

- Eichfixierung: Zusätzliche Bedingungen an A^μ , die die Eichfreiheitsgrade reduzieren, nicht aber die physikalischen FHGs (d.h. keine “physikalische em Feldkonfiguration” darf durch die Eichfixierung ausgeschlossen werden).

- Lorenz-Eichung: Fordere $\partial_\mu A^\mu = 0$. Damit werden die inhomogenen MGs (126) zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \right) = \square A^\nu(x) = j^\nu(x) \quad (131)$$

(vier unabhängige masselose KGs).

- Coulomb-Eichung: Fordere $\nabla \mathbf{A} = 0$. Damit

$$\rho(x) = \nabla \mathbf{E}(x) = \nabla \left(-\partial_t \mathbf{A}(x) - \nabla \phi(x) \right) = -\Delta \phi(x) \quad (132)$$

(Poisson-Gleichung). Im Vakuum ($j^\mu = 0$) und bei Wahl geeigneter RBs ($A^\mu = 0$ im Unendlichen) folgt $\phi = A^0 = 0$.

- Lösung der MGs im Vakuum (in Coulomb-Eichung):

- $\phi = A^0 = 0$.

- Verbleibende Gleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu j}(x) = \partial_\mu \left(\partial^\mu A^j(x) - \partial^j A^\mu(x) \right) = \square A^j(x) = 0. \quad (133)$$

(drei unabhängige masselose KGs) und $\nabla \mathbf{A} = 0$.

- Die KGs werden durch

$$A^j(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1,2,3} \epsilon^j(\lambda) \left(a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{+ikx} \right) \quad (134)$$

gelöst (siehe Abschnitt 3.2), wobei $\epsilon^j(\lambda)$, $\lambda = 1, 2, 3$ orthonormale Vektoren sind.

- Die Eichfixierung liefert $k_j \epsilon^j(\lambda) = 0$ ($\epsilon(\lambda)$ steht also senkrecht zum Impuls, muss also \mathbf{k} -abhängig sein, also $\epsilon^j(\lambda) \rightarrow \epsilon^j(\lambda, \mathbf{k})$, $\lambda = 1, 2$). Z.B. für $\mathbf{k} = (0, 0, k^3)$ $\epsilon^j(1, \mathbf{k}) = (1, 0, 0)$ und $\epsilon^j(2, \mathbf{k}) = (0, 1, 0)$.

- Endergebnis:

$$A^0(x) = 0 \quad (135)$$

$$A^j(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1,2} \epsilon^j(\lambda, \mathbf{k}) \left(a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{+ikx} \right). \quad (136)$$

4 Klassische Feldtheorie

4.1 Mechanische Analogie zur Feldtheorie: Federkette

- Federkette, N Massenpunkte (Masse jeweils m , Koordinaten q_j) verbunden durch Federn (Federkonstante k), zusätzlich jeweils mit einer Feder (Federkonstante a) mit $q_j = 0$ verbunden:

$$L(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{m}{2} (\dot{q}_j(t))^2 - \frac{k}{2} (q_j(t) - q_{j-1}(t))^2 - \frac{a}{2} (q_j(t))^2 \right), \quad (137)$$

RBs $q_0 = 0, q_N = 0$.

- Übergang ins Kontinuum, d.h. unendlich viele Massenpunkte, $N \rightarrow \infty$, diskreter Index j wird zu "kontinuierlichem Index" $x \in [0, d]$, damit $\Delta x = d/N \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} L(q_j, \dot{q}_j) &= \sum_{j=1}^N \Delta x \left(\frac{m}{2\Delta x} (\dot{q}_j(t))^2 - \frac{k\Delta x}{2} \left(\frac{q_j(t) - q_{j-1}(t)}{\Delta x} \right)^2 - \frac{a}{2\Delta x} (q_j(t))^2 \right) \rightarrow \\ &\rightarrow L[q, \dot{q}, q'] = \int_0^d dx \left(\frac{m}{2\Delta x} (\dot{q}(x, t))^2 - \frac{k\Delta x}{2} (q'(x, t))^2 - \frac{a}{2\Delta x} (q(x, t))^2 \right) \end{aligned} \quad (138)$$

(die Lagrange-Funktion $L(q_j, \dot{q}_j)$ [eine Funktion von vielen Variablen q_j] wird zu einem Funktional $L[q, \dot{q}, q']$ [bildet Funktionen von x auf eine Zahl ab, d.h. $L[q, \dot{q}, q']$ ist x -unabhängig]).

- Wähle $k = m/(\Delta x)^2$, außerdem Umbenennung $\sqrt{m/\Delta x} q(x, t) \rightarrow \phi(x, t)$, $a/m \rightarrow m^2$:

$$L[\phi, \dot{\phi}, \phi'] = \int_0^d dx \left(\frac{1}{2} (\dot{\phi}(x, t))^2 - \frac{1}{2} (\phi'(x, t))^2 - \frac{m^2}{2} (\phi(x, t))^2 \right) \quad (139)$$

bzw.

$$L[\phi, \partial_\mu \phi] = \int_0^d dx \left(\frac{1}{2} (\partial^\mu \phi(x, t)) (\partial_\mu \phi(x, t)) - \frac{m^2}{2} (\phi(x, t))^2 \right) \quad (140)$$

("Viererindex" $\mu = 0, 1$; kann jedoch im Rahmen der mechanischen Analogie auch auf $\mu = 0, 1, 2$ erweitert werden [Federnetz] oder auf $\mu = 0, 1, 2, 3$ [Massenpunkte und Federn füllen in kubischer Anordnung den 3-dimensionalen (3D) Raum aus]).

- Häufig verwendet man auch die sogenannte Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi(x)) (\partial_\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2} (\phi(x))^2, \quad (141)$$

wobei ab jetzt $x = (t, \mathbf{r})$ wieder den Raumzeitvektor bezeichnet.

- Die zugehörige Wirkung ist

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial^\mu \phi(x)) (\partial_\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2} (\phi(x))^2 \right), \quad (142)$$

wobei die Integrationsgrenzen von $\int d^4x$ i.d.R. weggelassen werden und sich aus dem jeweiligen Kontext ergeben.

4.2 BGls

- BGls für relativistische Feldtheorien sollen forminvariant unter Lorentz-Transformation sein, d.h. in allen Inertialsystemen gleich aussehen
 → Wirkung muss Lorentz-invariant sein, d.h. z.B. $S[\phi, \partial_\mu \phi] = S[\phi', \partial_\mu \phi']$.

- Raumzeitintegration:

$$\int d^4x' = \int d^4x \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| = \int d^4x \left| \det (\Lambda^\mu{}_\nu) \right| = \int d^4x, \quad (143)$$

wobei $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ und $\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = \pm 1$ (folgt aus (36)) verwendet wurde.

- Damit muss die Lagrange-Dichte ein Lorentz-Skalar sein, d.h. z.B.

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

- Bedingungen erfüllt für z.B. (141) und (142), wenn $\phi \rightarrow \phi' = \phi$ (dieses Verhalten unter Lorentz-Transformation wird für ϕ vorgegeben bzw. gefordert).

- BGls ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip (siehe auch Abschnitt 2.1.1).

- Die physikalische Zeitentwicklung einer Feldkonfiguration $\phi(x)$ mit Randbedingungen $\phi(x \in \text{Rand}) = \phi_0(x \in \text{Rand})$ (häufig $\phi(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty, t) = 0$, $\phi(\mathbf{r}, t_i) = \phi_{0,i}(\mathbf{r})$, $\phi(\mathbf{r}, t_f) = \phi_{0,f}(\mathbf{r})$) minimiert S , also $\delta S = 0$ bei Variation der Feldkonfiguration um $\delta\phi(x)$.

- Variationsrechnung führt auf Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = S[\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta\partial_\mu \phi] - S[\phi, \partial_\mu \phi] = \\ &= S[\phi, \partial_\mu \phi] + \int d^4x \frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) + \int d^4x \frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta\partial_\mu \phi(x)} \delta\partial_\mu \phi(x) \\ &\quad - S[\phi, \partial_\mu \phi] = \\ &= \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} \delta\phi(x) + \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \partial_\mu \delta\phi(x) = \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \right) \delta\phi(x) \\ &\quad + \underbrace{\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \right)}_{= \oint dn_\mu} \underbrace{\delta\phi(x)}_{=0 \text{ für } x \in \text{Rand}} \end{aligned} \quad (144)$$

mit Nebenrechnungen

$$\frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta \phi(x)} = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} \quad (145)$$

$$\frac{\delta S[\phi, \partial_\mu \phi]}{\delta \partial_\mu \phi(x)} = \dots = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \quad (146)$$

$$\delta \partial_\mu \phi(x) = \dots = \partial_\mu \delta \phi(x); \quad (147)$$

da $\delta \phi(x)$ beliebig, folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0. \quad (148)$$

- Rechnung geradlinig auf beliebig viele Felder erweiterbar: mit $\phi \rightarrow \phi^a$ lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^a} = 0. \quad (149)$$

4.2.1 Lagrange-Dichte und BGl eines reellen Skalarfelds, Hamilton-Formalismus für Felder

- Lagrange-Dichte (141).
- Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \phi; \quad (150)$$

damit

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \phi = 0. \quad (151)$$

Die KGG ist also die BGl eines reellen skalaren Felds.

- Der Feldauslenkung ϕ an jedem Raumpunkt \mathbf{x} wird ein kanonisch konjugierter Impuls zugeordnet, d.h. unendlich viele kanonisch konjugierte Impulse; Definition wie in der Mechanik (siehe Abschnitt 2.1.2):

$$\pi(\mathbf{r}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{r})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{r})} = \dot{\phi}(\mathbf{r}). \quad (152)$$

Die kanonisch konjugierten Impulse haben nichts mit dem vom Feld ϕ “getragenen” Impuls zu tun (siehe Abschnitt 4.3.3).

***** 20. November 2024 (11. Vorlesung) *****

- Legendre-Transformation der Lagrange-Dichte liefert die Hamilton-Dichte:

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}(\pi(x))^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2 + \frac{m^2}{2}(\phi(x))^2. \quad (153)$$

Die Hamilton-Funktion lautet

$$H[\pi, \phi] = \int d^3r \mathcal{H}(\pi, \phi). \quad (154)$$

- Häufig bewegt sich das Feld ϕ in einem Potential $V(\phi)$, z.B. $V(\phi) = \lambda\phi^4$. Damit

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) - V(\phi), \quad (155)$$

was in der BGI

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (156)$$

resultiert.

4.2.2 Lagrange-Dichte und BGI eines komplexen Skalarfelds

- Komplexes Skalarfeld $\phi = (A + iB)/\sqrt{2}$, $\phi \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
- Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) &= (\partial^\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi = \\ &= \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu A)(\partial_\mu A) - \frac{m^2}{2}A^2\right) + \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu B)(\partial_\mu B) - \frac{m^2}{2}B^2\right), \end{aligned} \quad (157)$$

entspricht also der Lagrange-Dichte zweier unabhängiger, d.h. nicht-WW reeller Skalarfelder. Diese Lagrange-Dichte ist reell (damit reelle Wirkung).

- BGIs für A und B :

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)A = 0 \quad , \quad \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)B = 0. \quad (158)$$

Diese können zu einer “komplexen BGI” zusammengefasst werden:

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi = 0. \quad (159)$$

4.2.3 Lagrange-Dichte und BGI eines Spin-1/2-Felds (Dirac-Feld)

- Spin-1/2-Feld $\psi \in \mathbb{C}$, hat vier Komponenten, ist ein Dirac-Spinor.
- Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi. \quad (160)$$

Diese Lagrange-Dichte ist reell (damit reelle Wirkung), außerdem ein Lorentz-Skalar, da $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ wie ein Vierervektor und $\bar{\psi}\psi$ wie ein Skalar unter Lorentz-Transformation transformieren (siehe Abschnitt 3.3.5).

- BGI:

$$- \psi = A + iB, \quad \psi \in \mathbb{C}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

– Euler-Lagrange-Gleichung für A :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = -m\bar{\psi} + i\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\gamma^0\psi, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A} = i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu; \quad (161)$$

damit

$$i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} - i\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\gamma^0\psi = 0. \quad (162)$$

– Euler-Lagrange-Gleichung für B analog:

$$i\left(i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}\right) - i\left(-i\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\gamma^0\psi\right) = 0. \quad (163)$$

– Geeignete Linearkombinationen von (162) und (163) ergeben

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \quad -i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu - m\bar{\psi}; \quad (164)$$

diese Gleichungen sind äquivalent (lassen sich mittels Komplexkonjugation ineinander überführen). Die DG ist also die BGI eines Spin-1/2-Felds.

4.2.4 Lagrange-Dichte und BGIs des Maxwell-Felds

- Maxwell-Feld $A^\mu \in \mathbb{R}$, hat vier Komponenten, ist ein Vierervektor.
- Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}(A^\mu, \partial_\mu A^\nu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu; \quad (165)$$

diese Lagrange-Dichte ist reell (damit reelle Wirkung), außerdem ein Lorentz-Skalar.

- Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu}; \quad (166)$$

damit

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (167)$$

(MGs).

4.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

- Kontinuierlichen Symmetrien der Wirkung bzw. der Lagrange-Funktion bedingen Kontinuitätsgleichungen, die wiederum Erhaltungsgrößen zur Folge haben.
- Noether-Theorem: Ermöglicht bei gegebener Symmetrietransformation die zugehörige Kontinuitätsgleichung bzw. Erhaltungsgröße auszurechnen.

4.3.1 Herleitung des Noether-Theorems

- Ausgangspunkt:

- Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)$.
- Transformation der Felder: $\phi^a(x) \rightarrow \phi^a(s, x)$ mit $\phi^a(0, x) = \phi^a(x)$.

- Es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x)) &= \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x))}{\partial \phi^b(s, x)} \frac{\partial \phi^b(s, x)}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(s, x)} \frac{\partial \partial_\nu \phi^b(s, x)}{\partial s} = \\
 &= \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x))}{\partial \phi^b(s, x)} - \left(\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(s, x)} \right) \right)}_{\text{(Euler-Lagrange-Gleichungen)}} \frac{\partial \phi^b(s, x)}{\partial s} \\
 &\quad + \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(s, x)} \frac{\partial \phi^b(s, x)}{\partial s} \right). \tag{168}
 \end{aligned}$$

Erfüllen die Feldkonfigurationen $\phi^a(x)$ die BGls, folgt

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x)) \Big|_{s=0} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(x)} \frac{\partial \phi^b(s, x)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \tag{169}$$

(Noether-Theorem).

- Lässt die Transformation der Felder die Lagrange-Dichte invariant, d.h.

$$\mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x)) = \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)) \tag{170}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x)) = 0, \tag{171}$$

folgt eine Kontinuitätsgleichung,

$$\partial_\nu j^\nu(x) = 0 \quad , \quad j^\nu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(x)} \frac{\partial \phi^b(s, x)}{\partial s} \Big|_{s=0}. \tag{172}$$

- Ist z.B. $\mathbf{j}(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) = 0$ lässt sich mit dem Satz von Gauß eine Erhaltungsgröße angeben:

$$0 = \int d^4x \partial_\mu j^\mu(x) = \oint dn_\mu j^\mu(x) = \int d^3r j^0(t_1, \mathbf{r}) - \int d^3r j^0(t_0, \mathbf{r}) \quad (173)$$

liefert

$$Q = \int d^3r j^0(t, \mathbf{r}) = \text{konstant.} \quad (174)$$

4.3.2 Energie-Impuls-Tensor

- Transformation der Felder: $\phi^a(x) \rightarrow \phi^a(s, x) = \phi^a(s+x)$ (hier ist s kein einzelner Parameter, sondern ein Vierervektor s^μ mit vier unabhängigen Einträgen). Diese Transformation lässt die Lagrange-Dichte nicht invariant. Dennoch lassen sich Kontinuitätsgleichungen herleiten.
- Es gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s^\nu} \mathcal{L}(\phi^a(s, x), \partial_\mu \phi^a(s, x)) \right|_{s=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial s^\nu} \mathcal{L}(\phi^a(s+x), \partial_\mu \phi^a(s+x)) \right|_{s=0} = \\ &= \partial_\nu \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)). \end{aligned} \quad (175)$$

- Kombination mit (169) liefert

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))}{\partial \partial_\nu \phi^b(x)} \underbrace{\frac{\partial \phi^b(s, x)}{\partial s^\rho} \Big|_{s=0}}_{=\partial_\rho \phi^b(x)} \right) = \partial_\rho \mathcal{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)) \quad (176)$$

bzw. in kompakter Schreibweise

$$\partial_\nu T^{\nu\rho} = 0 \quad , \quad T^{\nu\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi^b} \partial^\rho \phi^b - \eta^{\nu\rho} \mathcal{L}; \quad (177)$$

$T^{\mu\nu}$ wird als Energie-Impuls-Tensor bezeichnet (Begründung im nächsten Abschnitt).

4.3.3 Anwendungsbeispiele des Noether-Theorems

Komplexes Skalarfeld, Multiplikation mit einer Phase:

- Komplexes Skalarfeld $\phi = (A + iB)/\sqrt{2}$, $\phi \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
- Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial^\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi = \\ &= \left(\frac{1}{2} (\partial^\mu A) (\partial_\mu A) - \frac{m^2}{2} A^2 \right) + \left(\frac{1}{2} (\partial^\mu B) (\partial_\mu B) - \frac{m^2}{2} B^2 \right). \end{aligned} \quad (178)$$

- Transformation der Felder: $\phi(x) \rightarrow \phi(s, x) = e^{is}\phi(x)$ lässt die Lagrange-Dichte invariant. Damit $A(s, x) = A(x) - sB(x) + \mathcal{O}(s^2)$, $B(s, x) = B(x) + sA(x) + \mathcal{O}(s^2)$.

- Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\nu A(x)} = \frac{1}{2} \partial^\nu A(x) \quad , \quad \left. \frac{\partial A(s, x)}{\partial s} \right|_{s=0} = -B(x) \quad (179)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \partial_\nu B(x)} = \frac{1}{2} \partial^\nu B(x) \quad , \quad \left. \frac{\partial B(s, x)}{\partial s} \right|_{s=0} = +A(x) \quad (180)$$

liefert das Noether-Theorem (172) den Viererstrom

$$\begin{aligned} j^\nu(x) &= \frac{1}{2} \left(-(\partial^\nu A(x))B(x) + (\partial^\nu B(x))A(x) \right) = \\ &= \frac{i}{2} \left((\partial^\nu \phi^*(x))\phi(x) - \phi^*(x)(\partial^\nu \phi(x)) \right); \end{aligned} \quad (181)$$

bis auf einen irrelevanten Faktor entspricht dieser Viererstrom gerade der im Rahmen der KGG diskutierten Kontinuitätsgleichung (siehe Abschnitt 3.2). Nach der Quantisierung des komplexen Skalarfelds wird klar werden, dass es sich bei j^0 um die elektrische Ladungsdichte und bei \mathbf{j} um die elektrische Stromdichte handelt.

- Physikalische Konsequenz: Die elektrische Ladung kann sich zwar umverteilen, ist in Summe aber erhalten.

Mechanik, räumliche Translation:

- “Lagrange-Dichte”:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2. \quad (182)$$

- Transformation des “Felds”: $x(t) \rightarrow x(s, t) = x(t) + s$ lässt die Lagrange-Dichte invariant.

- Mit

$$\frac{\partial L(x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t)} = m\dot{x}(t) \quad , \quad \left. \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = 1 \quad (183)$$

liefert das Noether-Theorem (172)

$$\partial_0 j^0(t) = 0 \quad , \quad j^0(t) = m\dot{x}(t) \quad (184)$$

bzw. in einer in der Mechanik üblicheren Notation

$$\frac{d}{dt} p(t) = 0 \quad , \quad p = m\dot{x}(t). \quad (185)$$

Räumliche Translationen liefern also im Fall freier Teilchen die Impulserhaltung.

Mechanik, zeitliche Translation:

- “Lagrange-Dichte”:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x). \quad (186)$$

- Transformation des “Felds”: $x(t) \rightarrow x(s, t) = x(s + t)$.

- Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (187)$$

liefert das Noether-Theorem (177)

$$\partial_0 T^{00} = 0 \quad , \quad T^{00} = m\dot{x}\dot{x} - L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) \quad (188)$$

bzw. in einer in der Mechanik üblicheren Notation

$$\frac{d}{dt}E = 0 \quad , \quad E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x). \quad (189)$$

Zeitliche Translationen liefern also die Energieerhaltung.

Reelles Skalarfeld, Raumzeittranslationen:

- Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (190)$$

- Transformation des Felds: $\phi(x) \rightarrow \phi(s, x) = \phi(s + x)$. An Hand obiger Überlegungen im Rahmen der Mechanik sollte $s = (s^0, 0)$ die Energieerhaltung und $s = (0, \mathbf{s})$ die Impulserhaltung liefern. Beide Erhaltungssätze werden durch den bereits hergeleiteten Energie-Impuls-Tensor und dessen zugehörige Kontinuitätsgleichung (177) beschrieben.

- Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} = \partial^\nu \phi \quad (191)$$

lautet der Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\nu\rho} = \partial^\nu \phi \partial^\rho \phi - \eta^{\nu\rho} \mathcal{L}; \quad (192)$$

dabei entspricht

$$T^{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (193)$$

der Energiedichte (konsistent mit der in Abschnitt 4.2.1 abgeleiteten Hamilton-Dichte (153), d.h. $\mathcal{H} = T^{00}$) und

$$P^0 = \int d^3r T^{00} = \text{konstant} \quad (194)$$

der vom Feld getragenen und erhaltenen Energie. Analog entspricht

$$T^{0j} = (\partial^0 \phi)(\partial^j \phi) \quad (195)$$

der Impulsdichte und

$$P^j = \int d^3r T^{0j} = \text{konstant} \quad (196)$$

dem vom Feld getragenen und erhaltenen Impuls. Dieser “physikalische Impuls” hat, wie in Abschnitt 4.2.1 bereits erwähnt, nichts mit den kanonisch konjugierten Impulsen $\pi(\mathbf{r}) = \dot{\phi}(\mathbf{r})$ der Feldvariablen $\phi(\mathbf{r})$ zu tun (Gleichung (152)).

Literatur

- [1] O. Philipsen, “Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik,” Springer.
- [2] L. H. Ryder, “Quantum field theory,” Cambridge University Press.
- [3] M. Srednicki, “Quantum field theory,” Cambridge University Press.
- [4] M. Maggiore, “A modern introduction to quantum field theory,” Oxford University Press.
- [5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An introduction to quantum field theory,” Perseus Books.
- [6] P. Schmüser, “Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker,” Springer (1988).
- [7] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010) and 2011 partial update for the 2012 edition.
- [8] S. Lottini, O. Philipsen and M. Wagner, “Quantenfeldtheorie II,” Vorlesungsskript, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Sommersemester 2012.